



Constantin Kogler, *1997

Schule:
Freies Gymnasium Zürich

Eingang der Arbeit:
Juni 2015

Zur Veröffentlichung angenommen:
August 2015

Mathematisches Billard

Über periodische Billardbahnen in regelmäßigen Polygonen und innerhalb des Würfels

Bei mathematischem Billard geht es um die Fortbewegung von Billardkugeln innerhalb von allgemeinen Objekten. Eine periodische Billardbahn ist eine Bahn, die sich selbst repetiert. Wir studieren eine spezielle Darstellung der Billardbahn, um einen bisher unbekanntem Satz (Satz 2) über periodische Billardbahnen in regelmäßigen Polygonen herzuleiten. Die entwickelten Methoden werden für den Würfel transferiert.

1 Einführung

Mathematisches Billard ist die Studie der Bewegung von sich fortbewegenden Massepunkten, genannt Billardkugeln, innerhalb von Gebieten G , wobei G zusammenhängend und berandet ist. Der Rand von G ist stückweise glatt. Der Massepunkt bewegt sich geradlinig und mit konstanter Geschwindigkeit solange fort, bis er auf den Rand des Gebietes trifft und dort elastisch reflektiert wird.

Elastisch reflektiert bedeutet nach dem Gesetz: Einfallswinkel gleich Ausfallswinkel. Die Geschwindigkeit bleibt bei der Reflexion konstant und die Billardkugel bewegt sich nach der Reflexion wieder geradlinig und mit konstanter Geschwindigkeit fort, bis sie erneut den Rand trifft. Es gibt keine Reibung.

Trifft die Billardkugel auf eine Ecke eines Polygons, ist die Bewegung nicht weiter definiert und endet genau dort. Klassisch wird Billard im zweidimensionalen Raum betrachtet, also $G \subset \mathbb{R}^2$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit setzen wir voraus, der Startpunkt befindet sich auf dem Rand von G also: $S \in \partial G$. Die Billardkugel wird abgeschossen mit dem Abschusswinkel α . Es gilt: $\alpha \in (0, \pi)$.

Als Billardposition $p(t)$ wird die Position einer Billardkugel zum Zeitpunkt $t \in \mathbb{R}$ bezeichnet. $p(t)$ ist abhängig vom Startpunkt S auf dem Rand von G und dem Abschusswinkel α , sowie dem Zeitpunkt t . $w(t)$ sei der zwei-dimensionale Bewegungsvektor zu Zeitpunkt t . $w(0) := \vec{v}$. Also ist \vec{v} der Abschussvektor und damit die vektorielle Form von α . $r(t)$ ist das

Paar aus der Position $p(t)$ und $w(t)$. (siehe Abb. 1)

Definition 1

(Billardposition $p(t)$, $w(t)$ und $r(t)$ in Gebiet G). Für $G \subset \mathbb{R}^2$ zusammenhängend, berandet und stückweise glatt, $S \in \partial G$ und $\alpha \in (0, \pi)$ ist $p(t)$ die Position der Billardkugel zu einem Zeitpunkt $t \in \mathbb{R}$. $w(t)$ ist der Bewegungsvektor zu Zeitpunkt t . $r(t)$ ist das Paar aus $p(t)$ und $w(t)$.

$$p: \partial G \times (0, \pi) \times \mathbb{R} \rightarrow G$$

$$(S, \alpha, t) \rightarrow p(t)$$

$$w: \partial G \times (0, \pi) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(S, \alpha, t) \rightarrow w(t)$$

$$r: \partial G \times (0, \pi) \times \mathbb{R} \rightarrow G \times \mathbb{R}^2$$

$$(S, \alpha, t) \rightarrow r(t)$$

$$(S, \alpha, t) \rightarrow (p(t), w(t))$$

Anmerkung

Es gilt: $r(0) = (S, \vec{v})$

Die Billardbahn b ist die von der Billardkugel zurückgelegte *Spur*, nach unendlich langer Zeit zu einem Startpunkt $S \in \partial G$ und einem Abschusswinkel α .

Definition 2

(Billardbahn b in Gebiet G) $G \subset \mathbb{R}^2$ zusammenhängend, berandet und stückweise glatt, $S \in \partial G$ und $\alpha \in (0, \pi)$ ist die Billardbahn. $B(G)$ sei die Menge der Billardbahnen in G .

$$b : \partial G \times (0, \pi) \rightarrow B(G)$$

$$(S, \alpha) \rightarrow b(S, \alpha)$$

$$b(S, \alpha) := \{p(t) | t \in \mathbb{R}_{\geq 0}\}$$

Definition 3

(Periodische Billardbahn in Gebiet G) Eine Billardbahn b in G heißt periodisch, falls Gleichung 1 mit der Bedingung $t \in \mathbb{R} > 0$ lösbar ist.

$$r(0) = (S, \vec{v}) = r(t_1) \tag{1}$$

Anmerkung

Ist Gleichung (1) lösbar und b somit periodisch, gibt es unendlich viele verschiedene Zeitpunkte $t \in \mathbb{R}$, bei denen Gleichung (1) lösbar ist. So gilt: Wenn t_a Gleichung (1) löst, so folgt: $r(n \cdot t_a) = r(0)$ mit $n \in \mathbb{N}$. Es existieren auch nicht periodische Billardbahnen, für welche gilt:

$\forall t \in \mathbb{R}_{\neq 0} : r(0) \neq r(t)$. Nach $b(S, \alpha) = \{p(t) | t \in \mathbb{R}_{>0}\}$ folgt, dass eine periodische Billardbahn eine endliche Länge hat und aus einer endlichen Anzahl Teilstrecken besteht, während eine nicht periodische Billardbahn eine unendliche Länge hat und aus einer unendlichen Anzahl Teilstrecken besteht.

Definition 4

(Periodenzahl p von periodischer Billardbahn) Ist eine Billardbahn b periodisch, besitzt sie eine Periodenzahl $p \in \mathbb{N}$. Die Periodenzahl ist die Anzahl Teilstrecken, aus welcher die periodische Billardbahn besteht. Beispielsweise hat die periodische Billardbahn aus Abb. 2(a) eine Periodenzahl von 6.

Definition 5

(Billardbahn im Netz b_n) Als Billardbahn im Netz b_n in einem konvexen Polygon wird eine andere Darstellung der Billardbahn definiert. Sie entsteht, wenn man vom Startpunkt aus bei jeder einzelnen Reflexion anstatt die Billard-

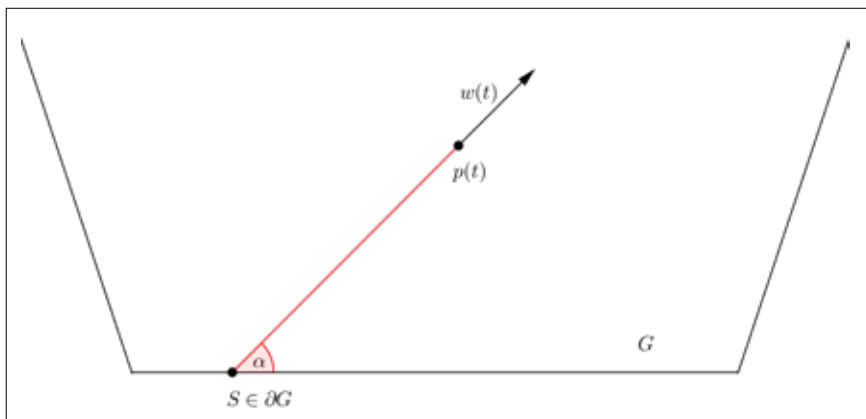


Abb. 1: Billardkugel zu Zeitpunkt t.

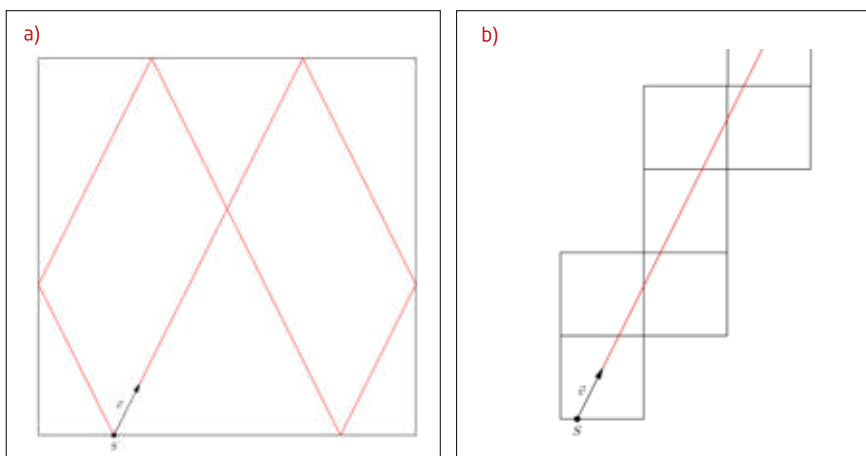


Abb. 2: a) Billardbahn b b) Billardbahn b_n .

kugel zu reflektieren, mit dem Polygon an der Seite der Reflexion eine Geraden Spiegelung durchführt. Das Netz von b_n ist die Vereinigung der gespiegelten Polygone, welche von der Billardkugel der Billardbahn im Netz b_n durchlaufen werden. Somit ist die Billardbahn im Netz b_n ein Strahl von Punkt S aus mit dem Abschussvektor \vec{v} . Abb. 2 veranschaulicht eine periodische Billardbahn im Quadrat und die zugehörige Billardbahn im Netz.

2 Periodische Billardbahnen in regelmäßigen Polygonen

Sei G ein regelmäßiges Polygon. Alle Seitenlängen seien 1. Die Seite, auf der sich der Startpunkt befindet, wird s genannt und ist somit die Startseite. Da die Polygone regelmäßig sind, ist es irrelevant auf welcher Seite der Startpunkt liegt. Nur der Abstand zu den Eckpunkten ist entscheidend. Deshalb betrachten wir von jetzt an S^* als den Abstand des Startpunktes zum linken Eckpunkt der Startseite und es gilt: $S^* \in (0, 1)$.

Definition 6

(Menge K^p einer Billardbahn im Netz b_n) P sei ein Schnittpunkt zwischen b_n , und

einer zur Startseite parallelen Seite des Netzes von b_n , wobei P ungleich S sei. P liege auf der Seite k . k ist parallel zu s . C sei der linke Eckpunkt von k . P ist ein Element der Menge K^p , falls gilt: (Abb. 3, Seite 38)

$$(1) \quad S^* = \overline{PC}$$

Anmerkung

Da k parallel zu s ist, ist der Winkel zwischen b_n und k gleich wie der Abschusswinkel. Wegen dieser Eigenschaft und der Abstandseigenschaft (1) ist jedes Element der Menge K^p sozusagen eine Kopie des Startpunktes im Netz.

Lemma 1

Für alle regelmäßigen Polygone gilt: Ist $K^p \neq \{ \}$, so hat die Menge K^p unendlich viele Elemente.

Beweis

Zu t_1 sei die Billardkugel im Netz Element der Menge K^p . Aus den Eigenschaften der Menge K^p folgt: Die Bahn der Billardkugel von $t = 0$ bis t_1 ist gleich wie die Bahn der Billardkugel von t_1 bis $2 \cdot t_1$. Somit ist die Billardkugel zu $2 \cdot t_1$ Element der Menge K^p . Nun setzen wir $t_1 = 2 \cdot t_1$ und führen die gleiche Argu-

mentationskette nochmals durch und erhalten ein weiteres Element der Menge K^p . Dies geht unendlich oft. \square

Lemma 2

Für alle regelmäßigen Polygone gilt: Ist b_n zugehörig zu einer periodischen Billardbahn, so ist die Menge K^p nicht leer.

Beweis

Nach der Definition einer periodischen Billardbahn wissen wir, dass für die Billardbahn zu einem Zeitpunkt, nennen wir ihn t_1 , gilt: $r(t_1) = (S, \vec{v})$. Es folgt, dass auch zu $2 \cdot t_1$ gilt: $r(2 \cdot t_1) = (S, \vec{v})$. Das Hauptargument des Beweises ist: Die Billardkugel legt innerhalb des Polygons von 0 bis t_1 genau die gleiche Bahn zurück wie von t_1 bis $2 \cdot t_1$. Daraus folgt, dass die Teilstrecken der Billardbahn im Netz von 0 bis t_1 genau gleich sein müssen wie von t_1 bis $2 \cdot t_1$. Die Billardkugel im Netz sei zu t_1 der Punkt P_1 . Die Billardkugel im Netz sei zu $2 \cdot t_1$ der Punkt P_2 . Nun wird gezeigt, $P_2 \in K^p$. Wir beweisen, dass beide Eigenschaften der Menge K^p für P_2 gelten:

(1) P_2 befindet sich auf einer Seite parallel zu der Startseite.

Beweis

Befindet sich P_1 auf einer Seite parallel zur Startseite, ist dies der Fall. Befindet sich P_1 nicht auf einer Seite parallel zur Startseite gilt: Von 0 bis t_1 bewegt sich die Billardkugel im Netz von der Startseite zu einer nicht parallelen Seite, also bewegt sich die Billardkugel von t_1 bis $2 \cdot t_1$ auch von einer Seite zu einer nicht parallelen Seite. Folglich ist die Seite, auf der sich P_1 befindet, nicht parallel zu der Seite von P_2 . Die Billardbahn im Netz hat den Abschusswinkel a . Seiten auf denen sich P_1 oder P_2 befinden, müssen die Billardbahn im Winkel a schneiden, dies gilt wegen der Periodizität. Möchte man allgemein eine Gerade mit einer Seite im Winkel a schneiden, kommen dafür nur zwei Lagen der Seite in Frage. Die Startseite ist in einer dieser Lagen gedreht und die Seite, auf der sich P_1 befindet, in der anderen. Daraus folgt: P_2 ist gleich wie die Startseite gedreht und somit parallel.

(2) Der Abstand von P_2 zu dem linken Eckpunkt der Seite von P_2 ist gleich S^* .

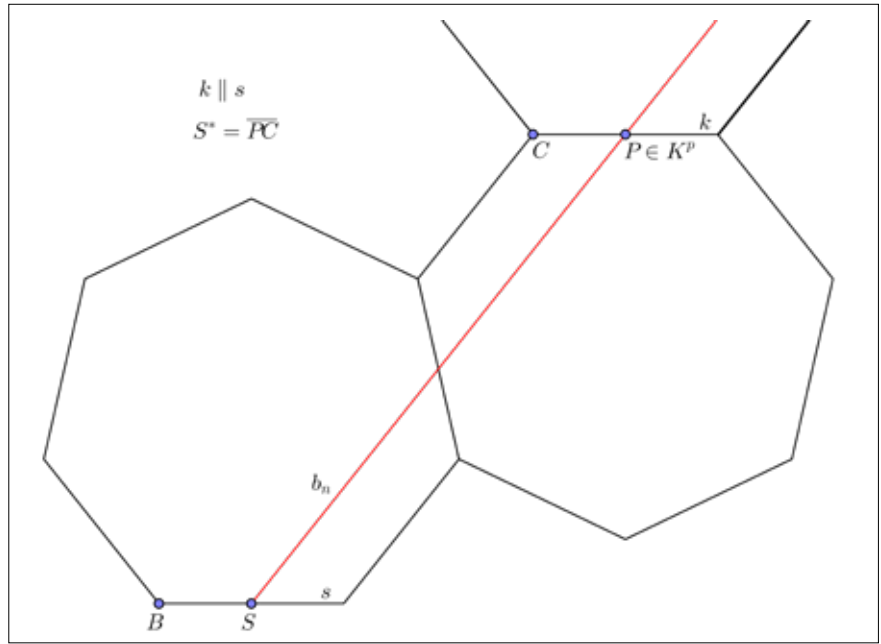


Abb. 3: Element der Menge K^p im Netz eines regelmäßigen Siebenecks.

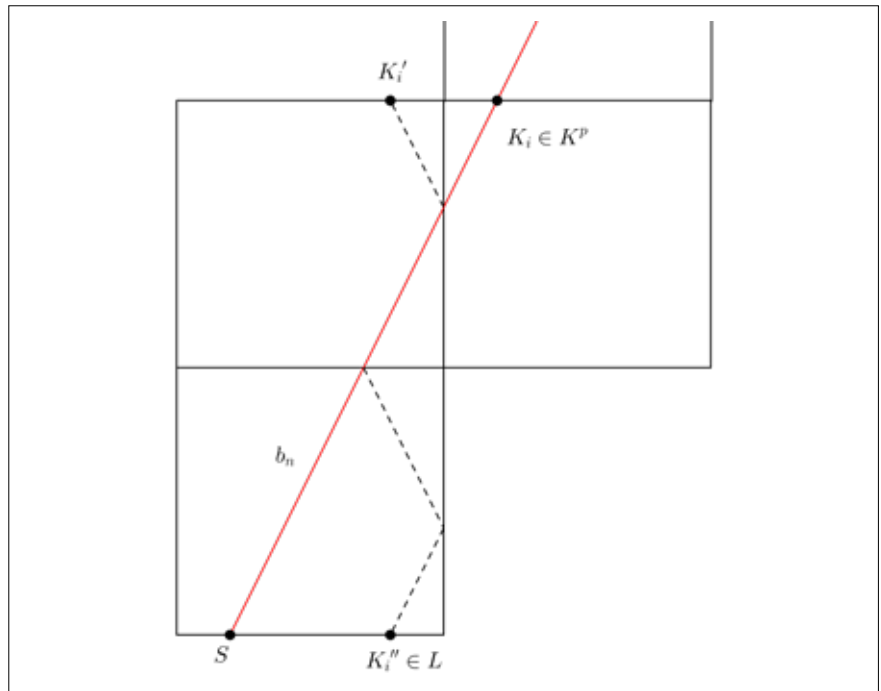


Abb. 4: Konstruktion der Menge L.

Beweis

Wegen der Periodizität muss die erste Teilstrecke der Billardbahn im Netz, also die Strecke zwischen Startpunkt und erstem Schnittpunkt des Netzes mit der Billardbahn, gleich sein wie die erste Teilstrecke nach P_2 . Zusätzlich gilt (1) und daher muss der Abstand von P_2 zum linken Eckpunkt gleich S^* sein. P_2 ist somit $\in K^p$. \square

Definition 7

(Menge L abhängig von einer Menge K^p) Das Netz einer Billardbahn ist durch

Geradenspiegelungen entstanden. Sei $K_i \in K^p$. Nun wird der Prozess der Entstehung des Netzes umgedreht. Also das Netz wird wieder zum Urpolygon zurückgeklappt oder anders gesagt die Polygone werden mit Geradenspiegelungen auf das Urpolygon zurück gespiegelt.

So auch das Polygon, von welchem K_i ein Element ist. Die Punkte des Urpolygons, auf denen sich durch diesen Prozess ein zurückgeklapptes Element der Menge K^p befindet, bilden die Menge L. (Abb. 4)

Anmerkung

Die Abstandseigenschaft der Elemente der Menge K^p bleibt bei den Geraden- spiegelungen erhalten. Daher können pro Seite des regelmäßigen Polygons nur zwei Punkte $\in L$ sein. Es folgt: Die Menge L hat eine endliche Anzahl Elemente.

Satz 1

Für alle regelmäßigen Polygone gilt: Eine Billardbahn ist genau dann periodisch, wenn die Menge K^p der zugehörigen Billardbahn im Netz nicht leer ist.

Beweis

Unterscheiden wir die beiden Aussagen:
 (1) Billardbahn periodisch $\Rightarrow K^p \neq \{\}$:
 Dies wurde in Lemma 2 bewiesen.
 (2) $K^p \neq \{\}$ \Rightarrow Billardbahn periodisch.

Beweis

Nach Lemma 1 hat demnach die Menge K^p unendlich viele Elemente. Daraus folgt: Zu unendlich vielen verschiedenen Zeitpunkten erreicht die Billardkugel im Polygon ein Element der Menge L .

Da die Menge L jedenfalls eine endliche Anzahl Elemente hat, gilt: Es existieren zwei ungleiche Zeitpunkte $t_1; t_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $t_1 < t_2$ für die $p(t_1) = p(t_2)$. Da es zurückgeklappte Elemente der Menge K^p sind und diese auf den gleichen Punkt zurückgeklappt werden, ist auch der Bewegungsvektor gleich. So gilt: $r(t_1) = r(t_2)$. Lassen wir dann die Zeit rückwärts laufen bis $t_1 = 0$ haben wir einen Zeitpunkt $t^* = t_2 - t_1 > 0$ für den gilt: $r(0) = r(t^*)$. Somit ist die Billardbahn per Definition periodisch. \square

Definition 8

(Koordinatensystem A einer Billardbahn b oder b_n) A sei ein kartesisches Koordinatensystem. Der Startpunkt der Billardbahn habe in A die Koordinaten $(0, 0)$. Die X -Achse sei parallel zur Startseite. Alle Elemente des Polygons, innerhalb welchem b oder b_n sich befindet, haben Y -Koordinaten größer gleich null.

Satz 2

Für den Abschusswinkel α einer periodischen Billardbahn in einem regelmäßigen Polygon mit Seitenzahl n gibt es $a_i \in \mathbb{Z}; b_i \in \mathbb{Z}$ mit $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, sodass gilt:

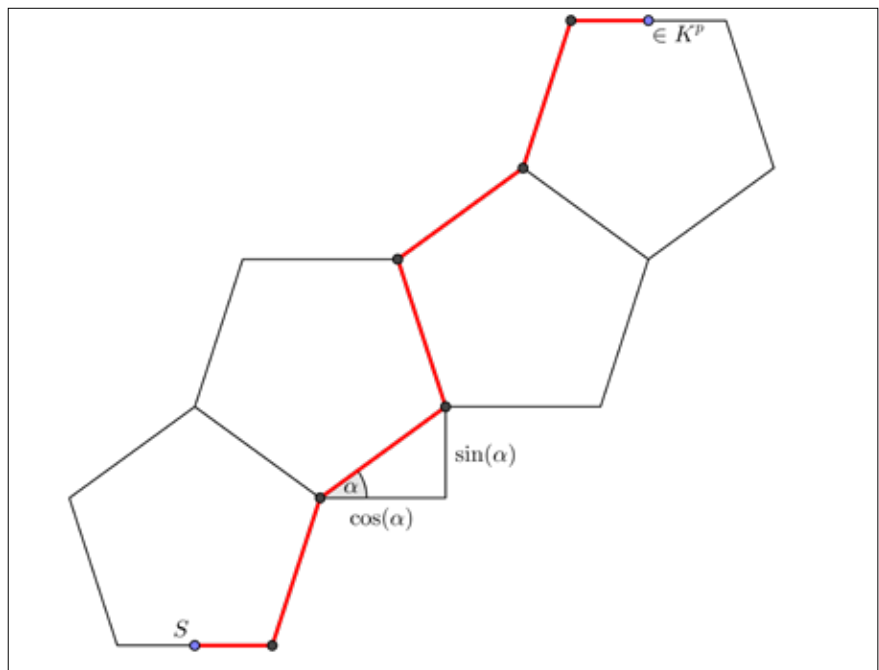


Abb 5: Pfad zu Element der Menge K^p .

$$\tan(\alpha) = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} a_i \cdot \sin(i \cdot \frac{2\pi}{n})}{\sum_{i=0}^{n-1} b_i \cdot \cos(i \cdot \frac{2\pi}{n})} \quad (2)$$

Beweis

Nach Satz 1 gilt: Eine Billardbahn ist genau dann periodisch falls die Menge K^p der zugehörigen Billardbahn im Netz nicht leer ist. Somit ist das allgemeine Untersuchen der Menge K^p von Interesse. Satz 2 beantwortet die Frage: Für das Netz eines regelmäßigen Polygons mit Seitenzahl n , welche Koordinaten (im Koordinatensystem A) kann ein Element der Menge K^p haben? Zeigen wir folgende Teilaussagen:

(1) Im Netz des regelmäßigen Polygons gilt: Jede Kante des Netzes ist parallel zu einer der Kanten des Startpolygons.

Beweis

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit zeigen wir, dass jedes Teilpolygon des Netzes eine zur x -Achse parallele Kante hat. Wir zeigen, dass wenn ein Polygon des Netzes P_1 eine zur x -Achse parallele Kante hat, so hat auch das von der Billardkugel als nächstes durchlaufene Polygon P_2 eine zur x -Achse parallele Kante. P_1 teilt sich mit P_2 eine Kante. Ist diese Kante parallel zur x -Achse, gilt die zu zeigende Aussage. Falls nicht gilt: P_1 ist kongruent zu P_2 . x sei die zur x -Achse parallele Kante von P_1 , k sei die von P_1

und P_2 geteilte Kante. Die Innenwinkel sind alle gleich. Die Drehung zweier Kanten, die sich einen Eckpunkt teilen, unterscheidet sich um den Innenwinkel. Die Drehung von x im Verhältnis zu k unterscheidet sich somit um ein Vielfaches des Innenwinkels. Wegen der Kongruenz von P_1 und P_2 gibt es somit eine Kante von P_2 , welche um das gleiche Vielfache des Innenwinkels gedreht ist und somit parallel zu x ist.

(2) Die Y -Koordinaten jedes Elementes der Menge K^p im Koordinatensystem A sind gleich Summen von ganzzahligen Vielfachen von Sinusen der Winkel der Seiten des Startpolygons. Für die X -Koordinaten sind es Summen von ganzzahligen Vielfachen von Cosinussen der Winkel der Seiten des Startpolygons.

Beweis

Jedes Element der Menge K^p befindet sich auf einer Seite des Netzes. Daher gibt es einen Pfad entlang des Netzes von dem Startpunkt zu dem Element der Menge K^p . (Abb. 5) Die Eckpunkte des Pfades unterteilen den Weg in Teilabschnitte. Der erste und letzte Abschnitt sind parallel zur x -Achse und haben zusammen die Länge 1 oder $\cos(0)$ (wegen der Definitionen des Koordinatensystems und der Menge K^p). Die übrigen Abschnitte sind Kanten des Netzes. Diese haben auf die y -Achse und x -Achse projiziert die Länge des Sinus und Cosinus der Winkel der Kante.

Wegen Aussage (1) müssen wir nur die Winkel der Kanten des Startpolygons nehmen. Somit können wir entlang des Pfades kontinuierlich die Koordinaten jedes Elementes der Menge K^p aufbauen. Damit sind die Y - und X -Koordinaten ganzzahlige Vielfache von Sinusen und Cosinusen der Winkel der Seiten des Startpolygons.

(3) Die Winkel der Seiten des Startpolygons zur X -Achse des Koordinatensystems A sind der Form $i \cdot 2\pi/n$.

Beweis

Der Startpunkt befinde sich auf der Seite s_0 . Nun nummerieren wir die Seiten im Gegenuhrzeigersinn mit s_1, s_2, \dots, s_{n-1} . β_i sei der Winkel zwischen der X -Achse und s_i . Somit ist s_0 gleich 0. Nach Abb. 6 gilt für $\beta_i - \beta_{i-1} = 2\pi/n$, mit $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$. Somit ist β_i gleich $i \cdot 2\pi/n$.

Da alle Seitenlängen gleich 1 sind, haben die Sinuse und Cosinuse der Winkel die richtigen Längen. Nun wissen wir, dass die Y -Koordinaten aller Elemente der Menge K^p im Koordinatensystem A sich als Summe ganzzahliger Vielfacher der Sinuse von β_i berechnen lassen, für die X -Koordinaten sind es die Cosinuse. Der Tangens des Abschusswinkel ist die Y -Koordinate geteilt durch die X -Koordinate des Elementes der Menge K^p . Die gesuchte Relation ergibt sich. \square

Wegen der folgenden Relationen gilt Korollar 1, 2, 3 und 4.

$$\begin{aligned} |\sin(\alpha)| &= |\sin(\pi + \alpha)| & |\cos(\pi + \alpha)| &= |\cos(\pi - \alpha)| \\ |\cos(\alpha)| &= |\cos(\pi + \alpha)| & |\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha)| &= |\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)| \\ |\sin(\pi + \alpha)| &= |\sin(\pi - \alpha)| & |\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha)| &= |\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha)| \end{aligned}$$

Korollar 1

Für den Abschusswinkel α einer periodischen Billardbahn in einem regelmäßigen Polygon mit Seitenzahl n , wobei n gerade ist, gibt es $a_i \in \mathbb{Z}; b_i \in \mathbb{Z}$ mit $i \in \{1, 2, \dots, \frac{n}{2} - 1\}$, sodass gilt:

$$\tan(\alpha) = \frac{\sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} a_i \cdot \sin(i \cdot \frac{2\pi}{n})}{\sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} b_i \cdot \cos(i \cdot \frac{2\pi}{n})} \tag{3}$$

Korollar 2

Für den Abschusswinkel α einer periodischen Billardbahn in einem regelmäßigen Polygon mit Seitenzahl n , wobei n ungerade ist, gibt es $a_i \in \mathbb{Z}; b_i \in \mathbb{Z}$ mit $i \in \{1, 2, \dots, \frac{n-1}{2}\}$, sodass gilt:

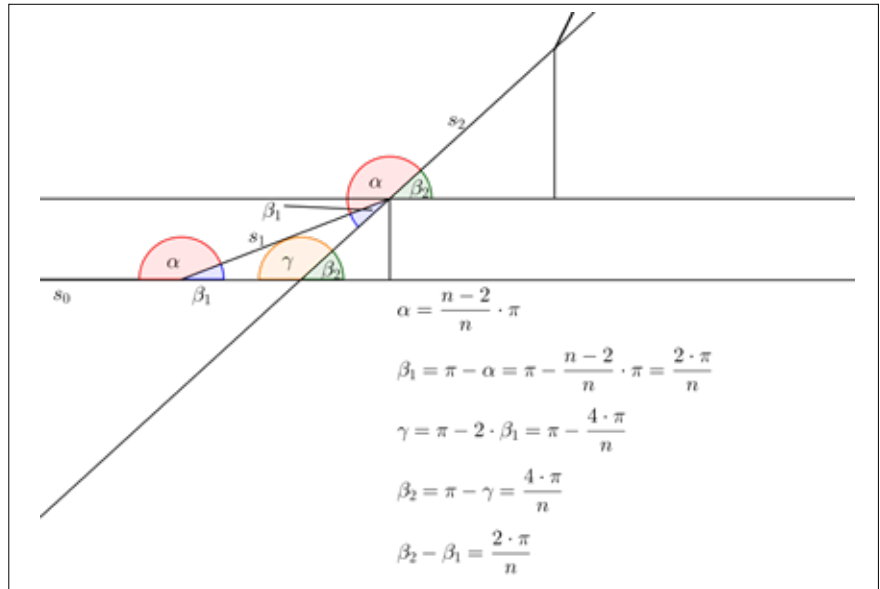


Abb. 6: Der Unterschied zwischen β_1 und β_2 .

$$\tan(\alpha) = \frac{\sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}} a_i \cdot \sin(i \cdot \frac{2\pi}{n})}{\sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}} b_i \cdot \cos(i \cdot \frac{2\pi}{n})} \tag{4}$$

Korollar 3

Für den Abschusswinkel α einer periodischen Billardbahn in einem regelmäßigen Polygon mit Seitenzahl n , wobei n durch 4 teilbar ist, gibt es $a_i \in \mathbb{Z}; b_i \in \mathbb{Z}$ mit $i \in \{1, 2, \dots, \frac{n}{4}\}$, sodass gilt:

$$\tan(\alpha) = \frac{\sum_{i=0}^{\frac{n}{4}} a_i \cdot \sin(i \cdot \frac{2\pi}{n})}{\sum_{i=0}^{\frac{n}{4}} b_i \cdot \cos(i \cdot \frac{2\pi}{n})} \tag{5}$$

Korollar 4

Für den Abschusswinkel α einer periodischen Billardbahn in einem regelmäßigen Polygon mit Seitenzahl n , wobei n durch 6 aber nicht durch 4 teilbar ist, gibt es $a_i \in \mathbb{Z}; b_i \in \mathbb{Z}$ mit $i \in \{1, 2, \dots, \frac{n-2}{4}\}$, sodass gilt:

$$\tan(\alpha) = \frac{\sum_{i=0}^{\frac{n-2}{4}} a_i \cdot \sin(i \cdot \frac{2\pi}{n})}{\sum_{i=0}^{\frac{n-2}{4}} b_i \cdot \cos(i \cdot \frac{2\pi}{n})} \tag{6}$$

Anmerkung

Es wird nun eine Möglichkeit beschrieben, wie man Korollar 1 geometrisch verstehen kann: Jede Seite im regelmäßigen Polygon mit gerader Seitenanzahl hat eine gegenüberliegende parallele Seite. Die Sinuse und Cosinuse von Winkeln von gegenüberliegenden Seiten

sind im Betrag gleich. Für die übrigen Korollare kann man ähnliche Argumente finden.

Folgerung

Für jedes $n > 3$ gibt es höchstens abzählbar viele Startwinkel, für die eine Billardbahn in einem regelmäßigen n -Eck periodisch ist. Dies liegt daran, dass jeder Abschusswinkel, welcher eine der Gleichungen löst, als ein Tupel - beziehend auf die entsprechende Gleichung - bestehend aus ganzen Zahlen darstellbar ist.

Korollar 1 bis 4 sind keine hinreichenden Bedingungen für Abschusswinkel periodischer Billardbahnen, da auch Winkel größer als π die Gleichungen erfüllen. Beschränkt man jedoch die Bedingung auf Winkel $\alpha \in (0, \pi)$ ist die Frage noch offen, ob die Bedingung hinreichend ist. Einzig für das regelmäßige Dreieck, Viereck und Sechseck, wissen wir, dass die Bedingungen hinreichend sind. Nur diese regelmäßigen Polygone parkettieren die Ebene und deshalb sind alle Elemente der Menge K^p durch die Position der parallelen Seiten der Parkettierung ausfindig zu machen.

Aus den entsprechenden Gleichungen folgt - durch das Betrachten der Parkettierungen folgt sogar, dass die Bedingungen hinreichend sind - somit für das Quadrat, das regelmäßige Dreieck und das Sechseck: (1) Eine Billardbahn im Quadrat ist genau dann periodisch, falls für $\alpha \in (0, \pi)$ Gleichung (7) gilt. (2) Eine Billardbahn im regelmäßigen

Dreieck oder Sechseck ist genau dann periodisch, falls für $\alpha \in (0, \pi)$ Gleichung (8) gilt. Abb. 7 zeigt einige periodische Billardbahnen mit den zugehörigen Daten.

$$\tan(\alpha) = \frac{a_1}{b_0} \quad (7)$$

$$\tan(\alpha) = \frac{a_1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{b_0 - \frac{b_1}{2}} \quad (8)$$

Im regelmäßigen Fünfeck und Achteck ergeben unsere Gleichungen folgende Sätze: (1) Ist eine Billardbahn im regelmäßigen Fünfeck periodisch, dann gilt für den Abschusswinkel Gleichung (9). (2) Ist eine Billardbahn im regelmäßigen Achteck periodisch, dann gilt für den Abschusswinkel Gleichung (10).

$$\tan(\alpha) = \frac{a_1 \cdot \sin(\frac{2\pi}{5}) + a_2 \cdot \sin(\frac{4\pi}{5})}{b_0 + b_1 \cdot \cos(\frac{2\pi}{5}) + b_2 \cdot \cos(\frac{4\pi}{5})} \quad (9)$$

$$\tan(\alpha) = \frac{a_1 \cdot \sin(\frac{\pi}{4}) + a_2}{b_0 + b_1 \cdot \sin(\frac{\pi}{4})} \quad (10)$$

3 Periodische Billardbahnen innerhalb des Würfels

W sei ein Würfel. ∂W ist der Rand des Würfels. Alle Seitenlängen des Würfels seien 1. Definieren wir die Fortbewegung einer Billardkugel innerhalb eines Würfels. Die Kugel bewegt sich solange geradlinig fort, bis sie auf ∂W trifft und dort nach folgendem Gesetz reflektiert wird: (1) Einfallswinkel gleich Ausfallswinkel (2) Einfallsebene gleich Ausfallsebene. Nach der Reflexion bewegt sich die Billardkugel wieder geradlinig fort, bis sie erneut ∂W trifft. Der Startpunkt sei $\in \partial W$. Trifft die Billardkugel auf eine Ecke oder eine Kante des Würfels ist die Bewegung nicht weiter definiert und endet genau dort.

$b_{wür}$ sei die Billardbahn im Würfel. Das Koordinatensystem A_w sei ein dreidimensionales Koordinatensystem und sei so platziert, dass eine der Ecken des Würfels die Koordinaten $(0, 0, 0)$ hat und eine Seite des Würfels Teilmenge des positiven Teiles der X -Achse, eine Seite des Würfels Teilmenge des positiven Teiles der Y -Achse und eine Seite des Würfels Teilmenge des positiven Teiles der Z -Achse ist. Der Abstand des Startpunktes zu den Kanten der Fläche, auf der der Startpunkt sich befindet, ist maßgebend für die Form der Billardbahn und nicht die Position der Fläche. Daher ist es ge-

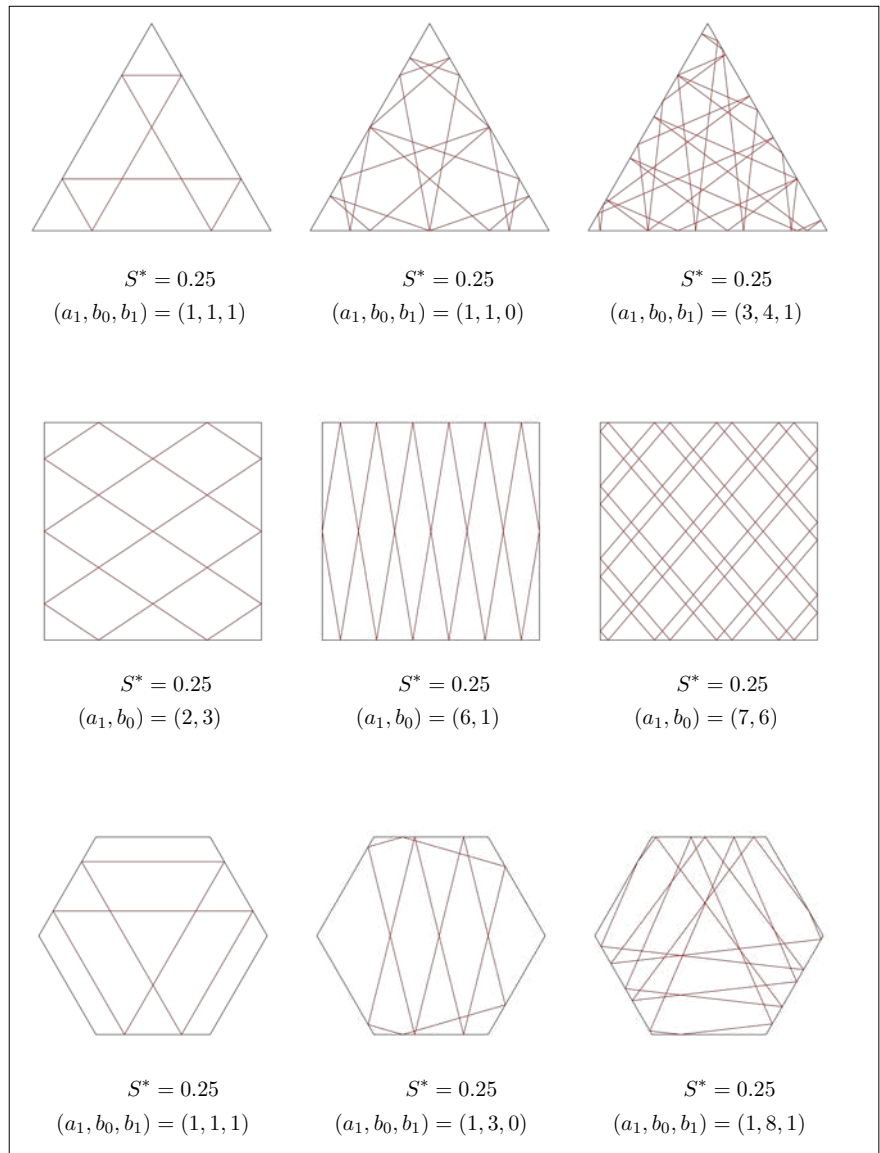


Abb. 7: Beispiele für periodische Billardbahnen im Dreieck, Quadrat und Sechseck.

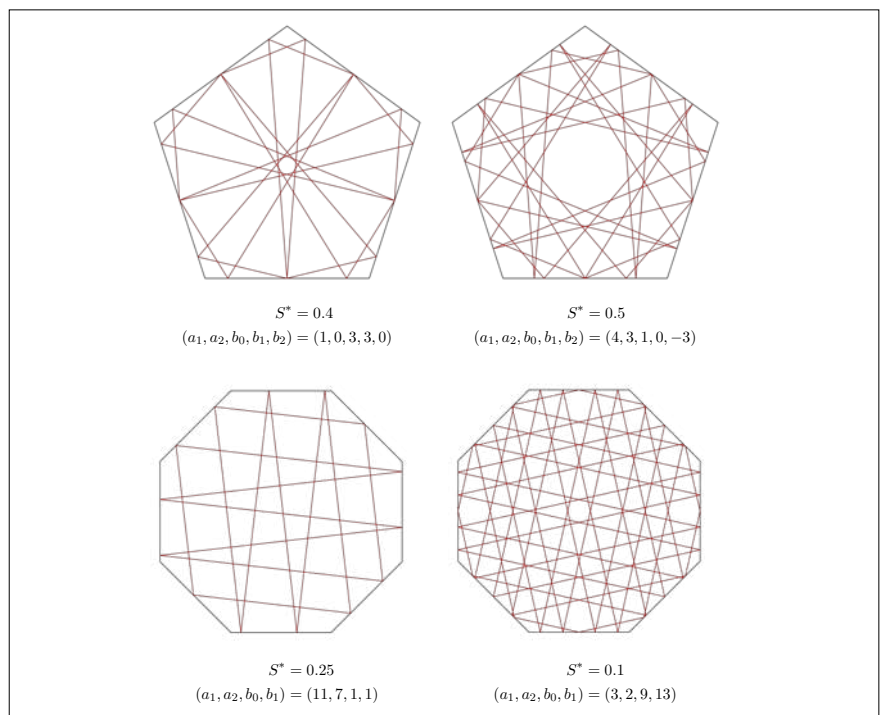


Abb. 8: Beispiele für periodische Billardbahnen im regelmäßigen Fünfeck und im regelmäßigen Achteck.

nügend als Startpunkt S zwei Zahlen $x, y \in (0,1)$ festzulegen. Die Ebene E sei die Ebene zu der die Punkte $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ und $(1, 1, 0)$ gehören. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit gilt: Der Startpunkt befindet sich auf der Ebene E und hat die Koordinaten $(x, y, 0)$. \vec{v} sei der Abschussvektor. Es gilt: $v_1, v_2 \in \mathbb{R}$ und $v_3 \in \mathbb{R}_{>0}$: (Abb. 9)

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

Wie das Quadrat die Ebene parkettiert, so füllt der Würfel den dreidimensionalen Raum. Daher bietet es sich an, auch die Menge K^p zu definieren. Als Billardbahn im Raum b_{wr} des Würfels wird eine andere Darstellung der Billardbahn definiert. Sie entsteht, wenn man vom Startpunkt aus bei jeder einzelnen Reflexion anstatt die Billardkugel zu reflektieren mit dem Würfel an der Fläche der Reflexion eine Ebenenspiegelung durchführt. Somit ist die Billardbahn im Raum b_{wr} ein Strahl von Punkt S aus mit dem Abschussvektor \vec{v} .

Definition 9

(Menge K^p von b_w) P_i sei ein Schnittpunkt zwischen b_w und dem Würfelraum, wobei die Fläche auf der sich P_i befindet, parallel zur Startfläche sei. S ist der Startpunkt von b_w . P_i sei ungleich S . S hat die Koordinaten $(x, y, 0)$ und liegt auf der Ebene E . P_i liege auf der Fläche T . T ist parallel zu E . k_1 sei die Kante von T , welche parallel zur Y -Achse ist und eine kleinere X -Koordinate hat. K_2 sei die Kante von T , welche parallel zur X -Achse ist und eine kleinere Y -Koordinate hat. P_1 sei der Punkt auf K_1 mit kleinstem Abstand zu P_i . P_2 sei der Punkt auf K_2 mit kleinstem Abstand zu P_i .

P_i ist ein Element der Menge K^p , falls gilt: (Abb. 10)

- (1) $x = \overline{P_i P_1}$
- (2) $y = \overline{P_i P_2}$

Lemma 3

Ist $K^p \neq \{ \}$, so hat die Menge K^p unendlich viele Elemente.

Beweis

Zu t_i sei die Billardkugel im Raum Element der Menge K^p . Aus den Eigenschaften

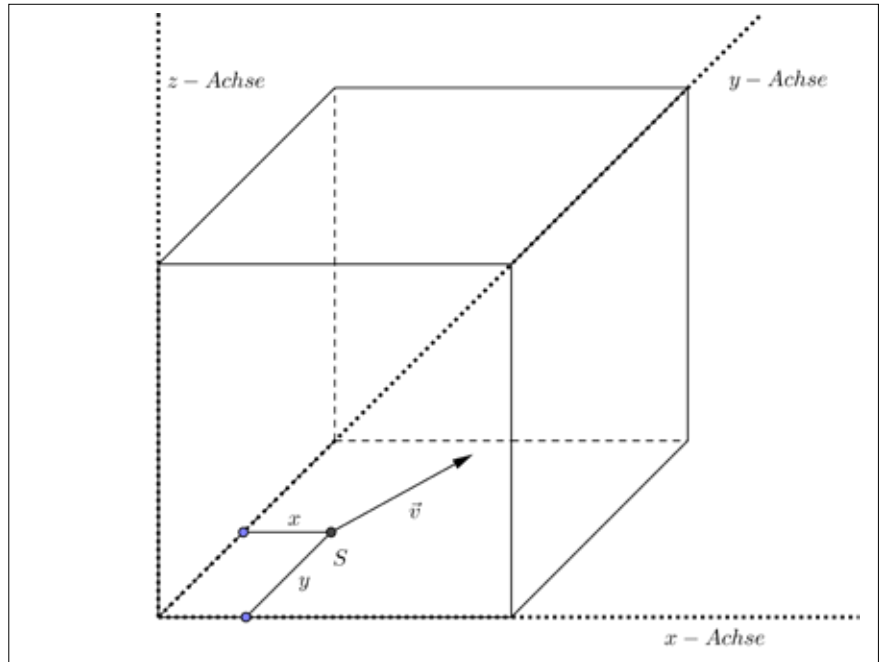


Abb. 9: Billardbahn im Würfel mit Startpunkt.

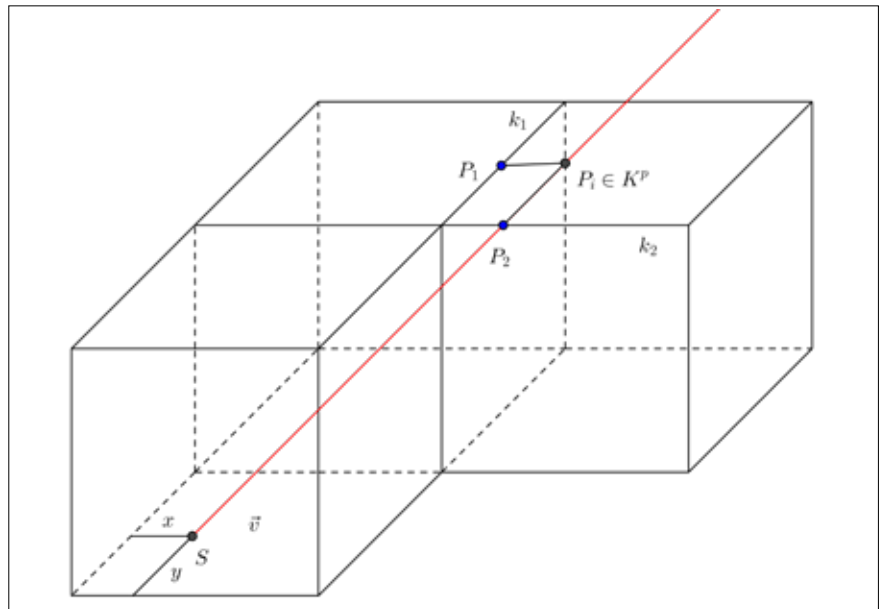


Abb. 10: Menge K^p .

ten der Menge K^p folgt: Die Bahn der Billardkugel von $t = 0$ bis t_i ist gleich wie die Bahn der Billardkugel von t_i bis $2 \cdot t_i$. Somit ist die Billardkugel zu $2 \cdot t_i$ Element der Menge K^p . Nun können wir t_i durch $2 \cdot t_i$ ersetzen und die gleiche Argumentationskette nochmals durchführen und erhalten ein weiteres Element der Menge K^p . Dies geht unendlich oft. \square

Lemma 4

Ist b_{wr} zugehörig zu einer periodischen Billardbahn, so ist die Menge K^p von b_{wr} nicht leer.

Beweis

Nach der Definition der periodischen

Billardbahn wissen wir, dass für die Billardbahn zu einem Zeitpunkt, nennen wir ihn t_i , gilt: Die Position und der Bewegungsvektor der Billardkugel ist gleich wie zu $t = 0$. Die Billardkugel im Raum sei zu t_i der Punkt P_i . Wir zeigen $P_i \in K^p$. Wir beweisen folgende Teilaussagen:

- (1) P_i befindet sich auf einer Fläche parallel zu der Startfläche.

Beweis

P_i ist eine Spiegelung des Startpunktes im Würfelraum. Alle Spiegelungen des Startpunktes befinden sich auf Flächen parallel zur Startfläche. Somit gilt die Aussage.

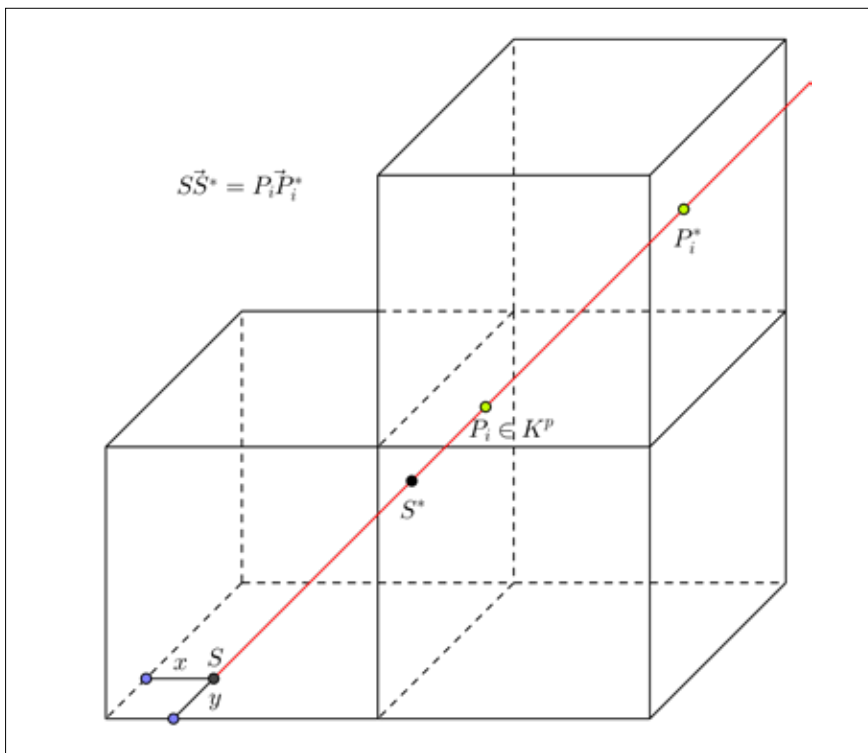


Abb. 11: Kandidaten für P_i .

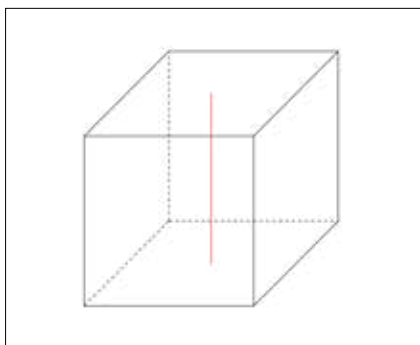


Abb. 12: $S = (0.5, 0.5)$; $\vec{v} = [0; 0; 1]$.

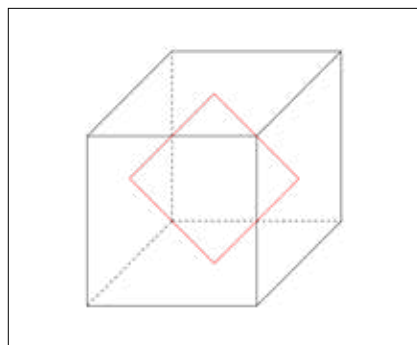


Abb. 13: $S = (0.5, 0.5)$; $\vec{v} = [0; 0; 1]$.

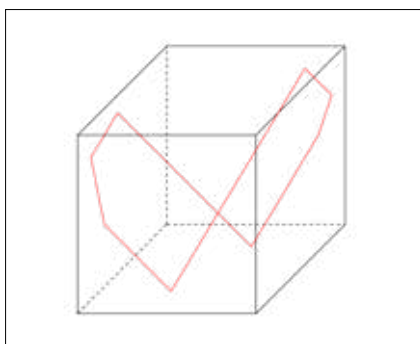


Abb. 14: $S = (0.4, 0.25)$; $\vec{v} = [1; 1; 2]$.

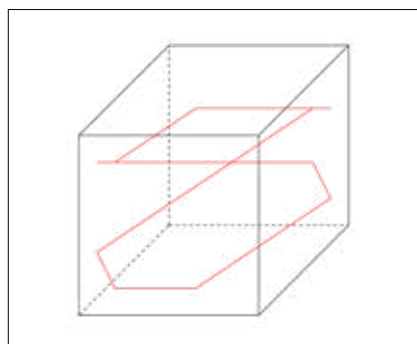


Abb. 15: $S = (0.5, 0.3)$; $\vec{v} = [2; 2; 1]$.

(2) P_i hat die richtigen Abstände zu den Kanten der Fläche, auf der sich P_i befindet, für die Menge K^p .

Beweis

(Abb. 11) Nur für einen Punkt auf der Fläche von P_i gilt, dass die Strecke vom Startpunkt zum ersten Schnittpunkt

der Billardbahn im Raum mit dem Würfelraum kongruent ist zu der Strecke von diesem Punkt zum nächsten Schnittpunkt der Billardbahn im Raum mit dem Würfelraum. Wegen der Periodizität ist P_i dieser Punkt und hat somit die richtigen Abstände für die Menge K^p .

Definition 10

(Menge L einer Billardbahn im Würfel) Der Würfelraum einer Billardbahn ist durch Ebenenspiegelungen entstanden. $K_i \in K^p$, $K_i \in b_{wr}$, $K_i \in$ eines gespiegelten Würfels von dem Würfelraum von b_{wr} . Nun wird der Prozess der Entstehung des Würfelraumes umgedreht. Die Würfel werden mit Ebenenspiegelungen auf den Urwürfel zurück gespiegelt. So auch der Würfel, von welchem K_i ein Element ist. Alle Elemente des Urwürfels, auf denen sich durch diesen Prozess ein gespiegeltes Element der Menge K^p befindet, sind $\in L$.

Anmerkung

Die Menge L hat jedenfalls eine endliche Anzahl Elemente, da Elemente der Menge L eine gewisse Abstandseigenschaft erfüllen müssen und zusätzlich nur auf zwei verschiedenen Flächen sein können. Somit kommen für Elemente der Menge L 8 Punkte in Frage.

Satz 3

Eine Billardbahn b_{wr} , innerhalb des Würfels ist genau dann periodisch, wenn die Menge K^p der zugehörigen Billardbahn im Raum nicht leer ist.

Beweis

Zeigen wir folgende Aussagen:

(1) Billardbahn periodisch $\Rightarrow K^p \neq \{\}$: Dies wurde in Lemma 4 bewiesen.

(2) $K^p \neq \{\} \Rightarrow$ Billardbahn periodisch.

Beweis

Nach Lemma 3 ist hat demnach die Menge K^p unendlich viele Elemente. Daraus folgt: Zu unendlich vielen verschiedene Zeitpunkten ist die Billardbahn im Würfel Element der Menge L . Da die Menge L jedenfalls eine endliche Anzahl Elemente hat, gilt: Es existieren zwei ungleiche Zeitpunkte $t_1, t_2 \geq 0$, für die Position und Bewegungsvektor der Billardkugel gleich sind. Daraus folgt, dass die Billardbahn periodisch ist. \square

Betrachten wir ein Koordinatensystem B_w welches eine parallele Verschiebung des Koordinatensystems A_w ist. Der Startpunkt S habe in dem Koordinatensystem B_w , die Koordinaten $(0, 0, 0)$. Im Koordinatensystem B_w : Alle Elemente der Menge K^p haben Koordinaten $(m, n, 0)$ mit $m, n \in \mathbb{Z}$ und $0 \in \mathbb{N} \neq 0$. Es folgt Korollar 5.

Korollar 5

Eine Billardbahn innerhalb des Würfels ist genau dann periodisch, wenn für den Abschussvektor folgendes mit $m, n \in \mathbb{Z}$ und $o \in \mathbb{N}_{\neq 0}$ sowie $u \in \mathbb{R}_{>0}$ gilt:

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = u \cdot \begin{bmatrix} m \\ n \\ o \end{bmatrix}$$

Abb. 12 bis 15 zeigen periodische Billardbahnen innerhalb des Würfels.

Anmerkung

Für fast alle periodische Billardbahnen gilt: Projiziert man eine periodische Billardbahn im Würfel auf eines der Quadrate, aus welchem der Würfel besteht, so entsteht eine periodische Billardbahn im Quadrat.

Anmerkung

Abb. 15 sieht ein wenig eigenartig aus. Dies liegt daran, dass zwei aufeinanderfolgende Streckenabschnitte in unserer Projektion auf der gleichen Ebene liegen.

Satz 4

Es gilt: $\text{ggT}(m, n, o) = 1$ für eine periodische Billardbahn im Würfel. Die Periodenzahl der Billardbahn ist $2 \cdot (|m| + |n| + o)$.

Beweis

Das erste Element der Menge K^p der periodischen Billardbahn im Netz hat im Koordinatensystem B_w die Koordinaten

(m, n, o) , mit $\text{ggT}(m, n, o) = 1$, da dieser Punkt eine Verlängerung des Abschussvektors ist. Zu $t_i > 0$ treffe die Billardkugel im Würfel den Startpunkt und der Bewegungsvektor sei gleich wie bei $t = 0$. Die Billardkugel im Raum trifft somit zu t_i den mehrfach reflektierten Startpunkt, welcher auch $\in K^p$ ist. Alle Flächen des Würfelraumes sind parallel zur XY -, XZ -, oder YZ -Ebene. Damit ein reflektierter Startpunkt Element der Menge ist, muss er eine gerade Anzahl an Malen an den drei Flächentypen reflektiert worden sein. Der Punkt $(2 \cdot m, 2 \cdot n, 2 \cdot o)$ ist der erste Punkt, der sowohl Element der Menge K^p , als auch ein reflektierter Startpunkt ist. Die Anzahl Teilstrecken zwischen S und $(2 \cdot m, 2 \cdot n, 2 \cdot o)$ ist gleich $2 \cdot (|m| + |n| + o)$. Somit ist dies die Periodenzahl. \square

Danksagung

Die Hauptidee zu dieser Arbeit, welche als Maturaarbeit entstanden ist, hatte mein Betreuer und Mathematiklehrer Thomas Wurms. Ohne ihn wäre ich nicht auf Billard als Thema gestoßen und seine Unterstützung war sehr hilfreich und essentiell für die Entstehung der Arbeit. Ursprünglich wollten wir durch Billard Geodäten auf platonischen Körpern klassifizieren. Es entwickelte sich durch Arbeit an diesem Problem die Menge K^p . Bei Interesse schicke ich gerne die komplette Arbeit zu. Kontakt: constantinkogler@gmail.com.

Quellenverzeichnis

- [1] Bettinaglio, Marco; Lehmann, Ferdinando: Mathematisches Billard. 1998. — URL http://www.educ.ethz.ch/unt/um/mathe/gb/Billard_Text.pdf - Zugriffsdatum: 30.10.2013
- [2] Tabachnikov, Serge: Geometrie und Billard (Springer-Lehrbuch) (German Edition). 2013. Springer Spektrum, 4 2013. — ISBN 9783642319242