

Freies Gymnasium Zürich

Maturaarbeit/ SJF-Wettbewerbsarbeit
2014/ 2015

**Über periodische Billardbahnen in Polygonen
und einfach geschlossene Geodäten auf
Tetraeder, Würfel und Oktaeder**

Autor:
Constantin Kogler

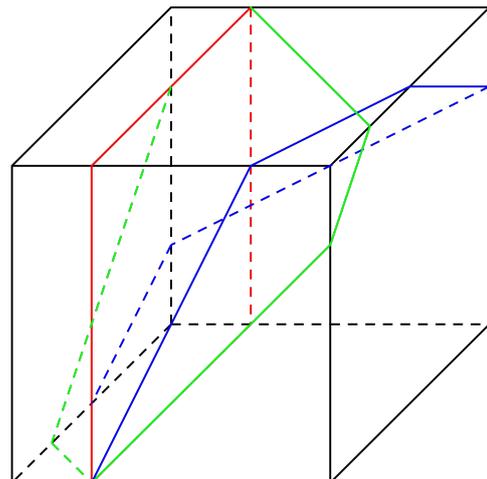
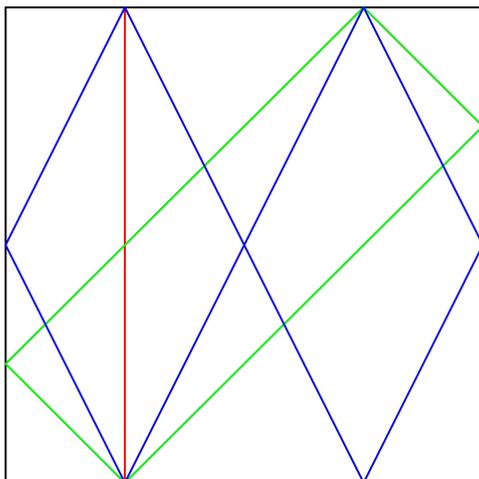
Geboren am: 29.04.1997

Klasse: O61

Betreuer:
Thomas Wurms

SJF-Experte
Bernhard Ruh:

Korreferent:
Ariana Zanoli



Inhaltsverzeichnis

Vorwort	3
1 Grundtheorie	4
1.1 Einführung Billard	4
1.2 Eigenschaften der Reflexion	6
2 Periodische Billardbahnen in regelmässigen Polygonen	8
2.1 Regelmässiges Dreieck	18
2.2 Quadrat	20
2.3 Regelmässiges Fünfeck	23
2.4 Regelmässiges Sechseck	24
2.5 Regelmässiges Achteck	26
3 Periodische Billardbahnen in Gebieten $G \subseteq \mathbb{R}^2$	27
3.1 Allgemeines Dreieck	27
3.2 Polygonale Billardbahnen	31
3.3 Kreis	36
4 Periodische Billardbahnen innerhalb des Würfels	38
5 Billard auf platonischen Körpern P	45
5.1 Billard auf ∂P	45
5.2 Geodäten auf ∂P	48
5.3 Klassifikation einfach geschlossener Geodäten auf ∂P	49
5.3.1 Tetraeder	49
5.3.2 Würfel	52
5.3.3 Oktaeder	64
Literatur	75

Vorwort

Die Hauptidee zu dieser Maturaarbeit hatte mein Betreuer und Mathematiklehrer Thomas Wurms. Ohne ihn wäre ich nicht auf Billard als Thema gestossen - geschweige der Hauptrichtung dieser Arbeit. Billard eignet sich als mathematisches Maturaarbeitsthema, da es grundsätzlich leicht zu verstehen ist, aber trotzdem sehr viele Aspekte in sich birgt.

Die ständige und immer geduldige wie nachsichtige Hilfe von Herrn Wurms war essenziell für die Entstehung dieser Arbeit und ich bedanke mich sehr. Auch half er mit Vereinfachungsideen, welche die Arbeit viel leichter zu verstehen machte. Des Weiteren unterstützte mich Herr Ruh, mein *Schweizer Jugend forscht* Experte, bei der Verallgemeinerung gewisser Resultate und dem Anwenden der entwickelten Methoden auf weitere Probleme. Dank ist auch an die Entwickler der Programme L^AT_EX, dem Schreibprogramm mit welchem diese Arbeit erstellt wurde, und Geogebra auszusprechen. Alle Abbildungen sind von mir mit dem Programm Geogebra erstellt worden. Anzumerken ist, dass alle 3-dimensionalen Figuren mit der Projektionsmatrix $[1, \frac{1}{2}, 0; 0, \frac{1}{2}, 1]$ in 2-dimensionale Abbildungen transformiert worden sind.

Die Definition der Geodäte in dieser Arbeit wurde von [4] inspiriert und ist eine elementare und nicht klassische Definition. Während des Prozesses der Entstehung dieser Arbeit machte das von mir im Sommer 2014 entdeckte Paper [2] mich auf einen Fehlschluss in der Behandlung der Frage der einfachen Geodäten auf dem Tetraeder aufmerksam. Alle in dieser Arbeit präsentierten Ergebnisse über Geodäten sind in [2] zu finden, jedoch ist die hier durchgeführte Vorgehensweise elementar und verwendet teilweise andere Methoden.

Schwierigkeiten bereitete mir das prägnante Aufschreiben der mathematischen Ideen, dennoch hoffe ich, dass der Leser in der Lage sein möge die Aussagen zu verifizieren. Ich blicke zurück auf eine längere Beschäftigung mit Billard - durchzogen von Hochs und Tiefs jedoch stets mit dem Glauben an die Lösbarkeit der mathematischen Probleme im Bewusstsein - und stelle fest, dass die Arbeit an Billard mir viel Freude bereitete. In Zukunft mich weiterhin mit Billard zu beschäftigen steht fest.

Constantin Kogler
Zürich, März 2015

1 Grundtheorie

1.1 Einführung Billard

Mathematisches Billard ist die Studie der Bewegung von sich reibungslos fortbewegenden Massepunkten, genannt Billardkugeln, innerhalb eines Gebietes G . Der Massepunkt bewegt sich geradlinig und mit konstanter Geschwindigkeit solange fort, bis er auf den Rand des Gebietes trifft und dort elastisch reflektiert wird. Elastisch reflektiert bedeutet nach dem Gesetz: Einfallswinkel=Ausfallswinkel. Die Geschwindigkeit bleibt bei der Reflexion gleich und die Billardkugel bewegt sich nach der Reflexion wieder geradlinig und mit konstanter Geschwindigkeit fort, bis sie erneut auf den Rand trifft.

In dieser Arbeit betrachten wir vorerst Billard in zusammenhängenden berandeten Gebieten G , welche Teilmengen des Raumes \mathbb{R}^2 sind. Das elastische Reflexionsgesetz gilt nur, wenn zusätzlich zum Reflexionspunkt eine Gerade oder ein Teilstück einer Geraden existiert, welche den Einfallswinkel und den Ausfallswinkel definiert. Ist G ein Polygon, ist die Polygonseite, auf welcher der Reflexionspunkt liegt, das Teilstück der Gerade. Sollte die Billardkugel auf den Anfang oder das Ende eines solchen Teilstückes eines Polygons treffen, trifft sie auf einen Eckpunkt. Die Reflexion ist dann nicht definiert und die Bewegung endet genau dort. Sollte der Reflexionspunkt sich auf einem gekrümmten Teilstück des Gebietes G befinden, ist die Tangente zu dem Reflexionspunkt die für das Reflexionsgesetz notwendige Gerade.

Jede Bewegung einer Billardkugel zu einem Startpunkt $T \in G$ und einem Abschussvektor $\vec{t} \in \mathbb{R}^2$ trifft den Rand. Den ersten Randberührungspunkt nennen wir S , somit ist $S \in \partial G$. Wenn S ein Eckpunkt von G ist, ist die Bewegung der Billardkugel nicht weiter definiert. Ist S kein Eckpunkt von G , bewegt sich die Billardkugel nach der Randberührung und Reflexion fort. \vec{v} sei der Richtungsvektor der Bewegung der Billardkugel nach der Reflexion. Die Bewegung der Billardkugel zu Startpunkt $S \in \partial G$ und Vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ beschreibt die gleiche Bewegung der Billardkugel, wie die Bewegung der Billardkugel zu einem Startpunkt $T \in G$ und einem Abschussvektor $\vec{t} \in \mathbb{R}^2$ nach der ersten Randberührung. Abbildung 1 veranschaulicht dies.

Als Billardposition r' wird die Position der Fortbewegung einer Billardkugel zu einem Zeitpunkt t bezeichnet. r' ist abhängig von dem Startpunkt S auf dem Rand von G und dem Abschussvektor \vec{v} , sowie dem Zeitpunkt t . r , abhängig von Startpunkt S , Abschussvektor \vec{v} und Zeitpunkt t , ist das Paar aus der Position r' (zu S, \vec{v}, t) und dem Bewegungsvektor zu Zeitpunkt t . Der Bewegungsvektor ist 2-dimensional. $w(t)$ sei der Bewegungsvektor zu Zeitpunkt t .

Definition 1. (Billardposition r' und r in Gebiet G) Für $G \subseteq \mathbb{R}^2$ zusammenhängend und berandet, $S \in \partial G$, $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$, $t \in \mathbb{R}$ ist r' die Position der Billardkugel in G abhängig von einem Startpunkt $S \in \partial G$, einem Abschussvektor \vec{v} und einem Zeitpunkt t . r ist das

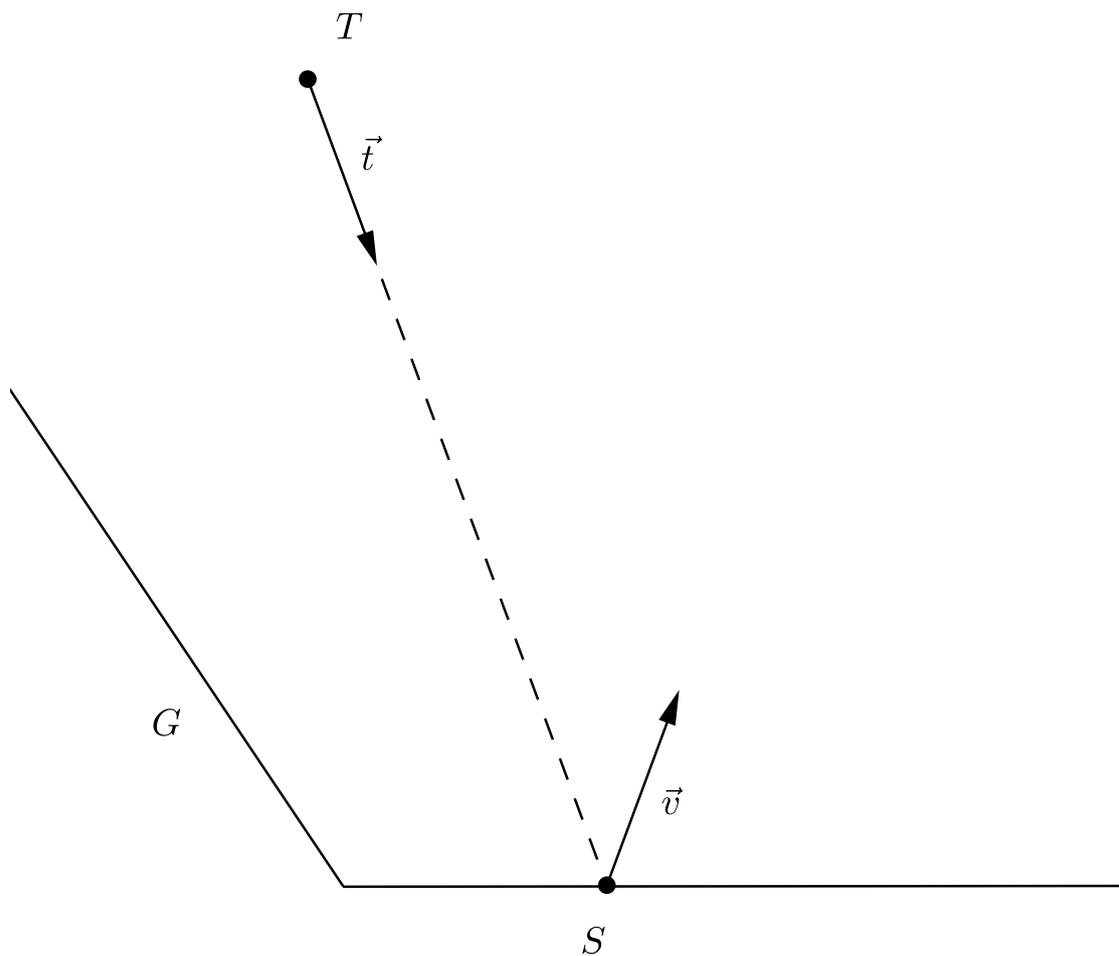


Abbildung 1

Paar aus r' und dem Bewegungsvektor zu Zeitpunkt t $w(t)$.

$$r' : \partial G \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow G$$

$$(S, \vec{v}, t) \rightarrow r'(S, \vec{v}, t)$$

$$r : \partial G \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow G \times \mathbb{R}^2$$

$$(S, \vec{v}, t) \rightarrow r(S, \vec{v}, t)$$

$$(S, \vec{v}, t) \rightarrow (r'(S, \vec{v}, t), w(t))$$

Anmerkung. Es gilt: $r(S, \vec{v}, 0) = (S, \vec{v})$

Die Billardbahn b ist die von der Billardkugel zurückgelegte *Spur*, nach unendlich langer Zeit zu einem Startpunkt $S \in \partial G$ und einem Abschussvektor \vec{v} .

Definition 2. (Billardbahn b in Gebiet G) Für $G \subseteq \mathbb{R}^2$ zusammenhängend und berandet, $S \in \partial G$, $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ ist b die Billardbahn.

$$\begin{aligned} b &: \partial G \times \mathbb{R}^2 \rightarrow G \\ (S, \vec{v}) &\rightarrow b(S, \vec{v}) \\ b(S, \vec{v}) &:= \{r'(S, \vec{v}, t) | t \geq 0\} \end{aligned}$$

Definition 3. (Periodische Billardbahn in Gebiet G) Eine Billardbahn b in G heisst *periodisch*, falls Gleichung 1 mit der Bedingung $t_1 \in \mathbb{R}_{>0}$ lösbar ist.

$$r(S, \vec{v}, 0) = (S, \vec{v}) = r(S, \vec{v}, t_1) \quad (1)$$

Anmerkung. Ist Gleichung 1 lösbar und b somit periodisch, gibt es unendlich viele verschiedene Zeitpunkte $t \in \mathbb{R}$, bei denen die Billardposition r gleich (S, \vec{v}) ist. $t_1, t_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ lösen beide Gleichung 1 für eine Billardposition r und $t_1 \neq t_2$. Es existiere kein $t_a \in (0, t_1)$ und $t_b \in (t_1, t_2)$, welches Gleichung 1 löst. Es gilt: $t_2 - t_1 = t_1 \Leftrightarrow t_2 = 2t_1$.

Definition 4. (Periodenzahl p von periodischer Billardbahn) Ist eine Billardbahn b periodisch, besitzt sie eine Periodenzahl $p \in \mathbb{N}$. $t_1 \in \mathbb{R}_{>0}$ löse Gleichung 1. Es existiere kein $t_n \in (0, t_1)$, welches Gleichung 1 löst. Die Periodenzahl p ist definiert als die Anzahl Randberührungen in der Zeitspanne $t \in (0, t_1]$.

1.2 Eigenschaften der Reflexion

Der Inhalt wurde entnommen aus [5] Seite 11. Nach dem *Fermat'schen Prinzip* breitet sich Licht zwischen zwei Punkten so aus, dass es die kürzeste Zeit benötigt. Bei konstanter Geschwindigkeit impliziert dies, dass Licht, falls es sich von einem Punkt zu einem anderen Punkt bewegt, den kürzesten Weg nimmt. Normalerweise ist dies die Gerade zwischen den beiden Punkten. Nun betrachten wir die kürzeste Verbindung zweier Punkte A und B mit Reflexion an einer Geraden.

Satz 1. Für $A, B \in \mathbb{R}^2$, Gerade $a \subseteq \mathbb{R}^2$, $C \in a$ und F und G als Schnittpunkt der senkrechten Gerade zu a durch A und B gilt: Die Strecke $\overline{AC} + \overline{CB}$ ist am kürzesten, wenn $\angle ACF = \angle BCG$ (Abbildung 2).

Beweis. Reflektieren wir Punkt A an a und erhalten A' . Es gilt $\overline{AC} = \overline{A'C}$ und somit $\overline{AC} + \overline{CB} = \overline{A'C} + \overline{CB}$. Die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten ist die Strecke zwischen den beiden Punkten, also ist die kürzeste Verbindung zwischen A' und B die Strecke $A'B$, welche a in C schneidet. $\overline{A'C} + \overline{CB}$ ist kürzer als $\overline{AC'} + \overline{C'B}$ für jedes andere C' . Damit gilt: $\angle BCG = \angle A'CF$ und $\angle A'CF = \angle ACF$ und damit $\angle ACF = \angle BCG$. \square

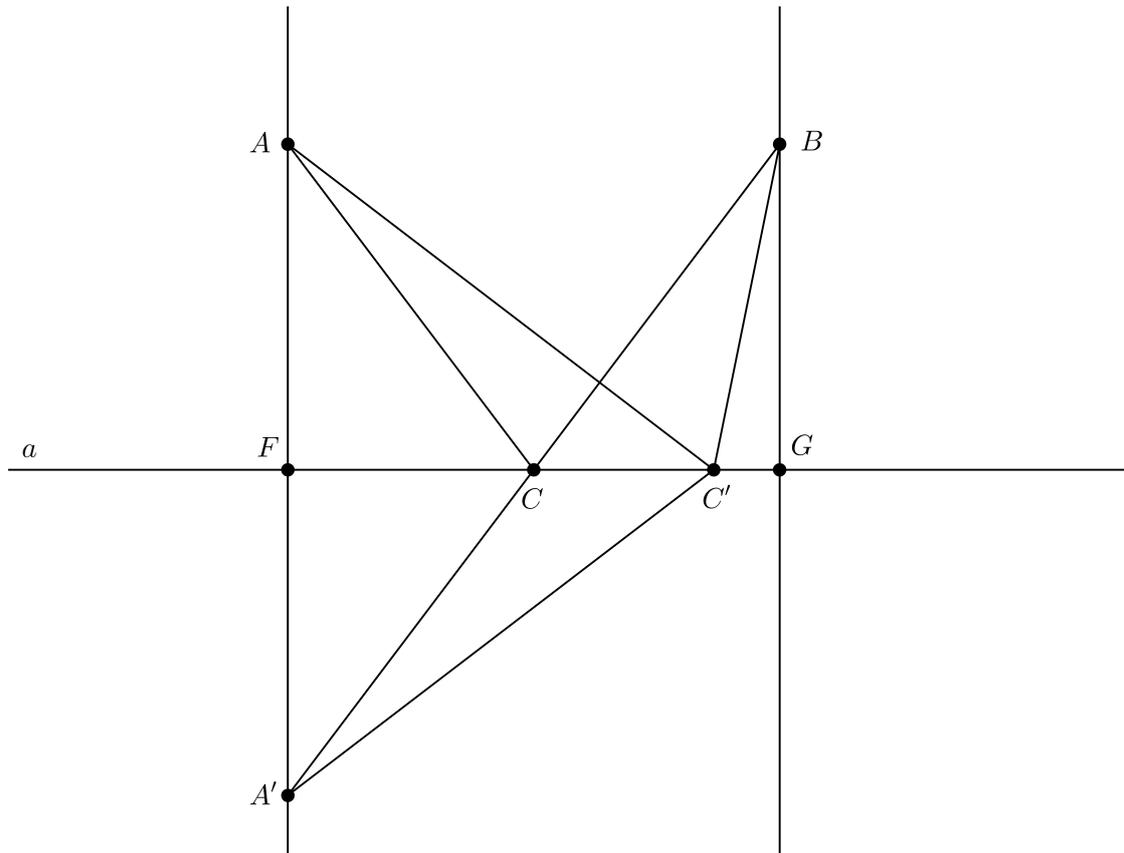


Abbildung 2: Kürzeste Verbindung zwischen A und B

2 Periodische Billardbahnen in regelmässigen Polygonen

Sei G ein regelmässiges Polygon. Alle Seitenlängen seien 1. Die Billardbahn b in G habe den Startpunkt S . S liege auf der Seite s des Polygons G .

Definition 5. (Koordinatensystem A zu einer Billardbahn b) A sei ein kartesisches Koordinatensystem. S habe die Koordinaten $(0, 0)$ in A . Die X -Achse liege parallel zu s . Die Y -Koordinaten aller Elemente von G haben einen Wert grösser gleich 0.

S teilt s in zwei Hälften. Betrachtet im Koordinatensystem A , wird s in eine *rechte* Hälfte und eine *linke* Hälfte geteilt.

Definition 6. (Abschusswinkel α einer Billardbahn b) Der Winkel α sei der kleinere der beiden Winkel zwischen dem Abschussvektor \vec{v} und der rechten Hälfte von s . α ist $\in [0, \pi]$. Für $x \in \mathbb{R}$ und den Abschussvektor \vec{v} im Koordinatensystem A gilt:

$$x \cdot \begin{bmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{bmatrix} = \vec{v}$$

Eine Billardbahn mit Abschusswinkel α ist gleich einer Billardbahn mit Abschussvektor $[\cos(\alpha); \sin(\alpha)]$ im Koordinatensystem A .

Als Billardbahn im Netz b_n in einem konvexen Polygon wird eine andere Darstellung der Billardbahn definiert. Sie entsteht, wenn man vom Startpunkt aus, bei jeder einzelnen Reflexion, anstatt die Billardkugel zu reflektieren, mit dem Polygon an der Seite der Reflexion eine Geradenspiegelung durchführt. Somit ist die Billardbahn im Netz b_n ein Strahl von Punkt S aus mit dem Abschussvektor \vec{v} . Das Netz der Billardbahn im Netz ist die Menge der gespiegelten Polygone ohne b_n . Abbildung 3 veranschaulicht b_n und das dazugehörige Netz, sowie die Billardbahn b mit dem gleichen Startpunkt und Abschussvektor.

Definition 7. (Billardposition r'_n und Billardbahn im Netz b_n in konvexem Polygon G) Für ein konvexes Polygon $G \subseteq \mathbb{R}^2$, $S \in \partial G$, $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ und $t \in \mathbb{R}$ ist r'_n die Position der Billardkugel im Netz. b_n ist die Billardbahn im Netz. Das Netz einer Billardbahn im Netz b_n ist definiert, als die gespiegelten Polygone ohne die Billardbahn b_n .

$$\begin{aligned} r'_n : \partial G \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (S, \vec{v}, t) &\rightarrow r'_n(S, \vec{v}, t) \end{aligned}$$

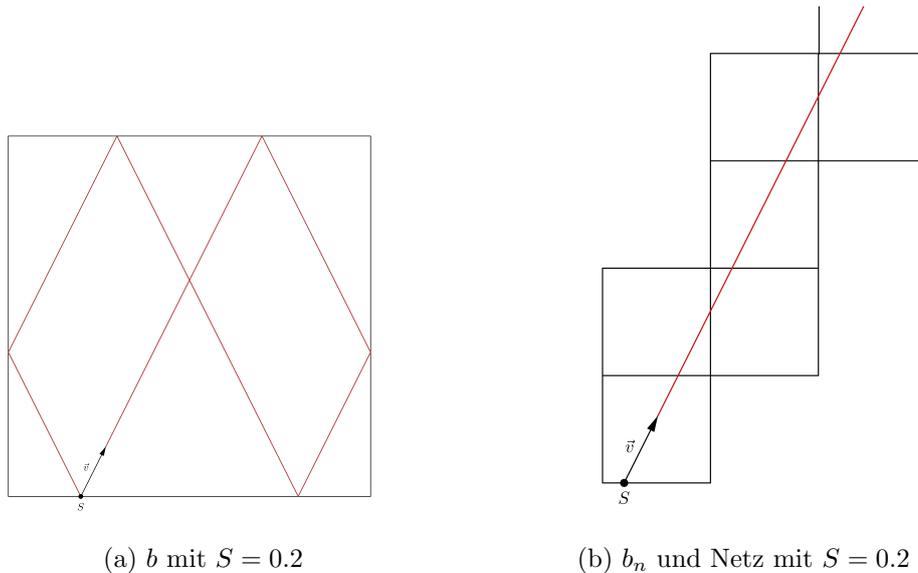


Abbildung 3

$$\begin{aligned}
 b_n &: \partial G \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\
 (S, \vec{v}) &\rightarrow b_n(S, \vec{v}) \\
 b_n(S, \vec{v}) &:= \{r'_n(S, \vec{v}, t) | t \geq 0\} \\
 \text{Netz}(b_n) &:= \text{Menge der gespiegelten Polygone ohne } b_n
 \end{aligned}$$

Folgende Symmetrien gelten:

Abbildung 4a: S_1 sei der Startpunkt von b_1 . S_2 sei der Startpunkt von b_2 . b_1 und b_2 seien Billardbahnen in dem gleichen regelmässigen Polygon. S_1 liege auf der Seite s_1 und S_2 liege auf der Seite s_2 . Im Koordinatensystem A , betrachtet mit S_1 als Startpunkt S , sei P_1 der linke Eckpunkt und P_2 der rechte Eckpunkt von s_1 . Im Koordinatensystem A , betrachtet mit S_2 als Startpunkt S , sei P_3 der linke Eckpunkt und P_4 der rechte Eckpunkt von s_2 . Zusätzlich gelte: $\overline{S_1 P_1} = \overline{S_2 P_3}$ und $\overline{S_1 P_2} = \overline{S_2 P_4}$. Der Abschusswinkel α beider Billardbahnen b sei gleich. Daraus folgt: b_1 ist deckungsgleich zu b_2 . Diese Symmetrie wird Seitensymmetrie genannt.

Abbildung 4b: S sei der Startpunkt einer Billardbahn b in einem regelmässigen Polygon mit Abschusswinkel $\alpha \geq \frac{\pi}{2}$. S befinde sich auf der Seite s des regelmässigen Polygons. w sei eine Senkrechte zu s und halbiere die Seite s . Die Spiegelung von b an w sei die Billardbahn b' . b' habe β als Abschusswinkel. Es folgt, dass: $\beta = \pi - \alpha$, ebenso dass b ist deckungsgleich zu b' . Also ist b zu einer Billardbahn mit Abschusswinkel $\leq \frac{\pi}{2}$ deckungsgleich. Diese Symmetrie wird Winkelsymmetrie genannt.

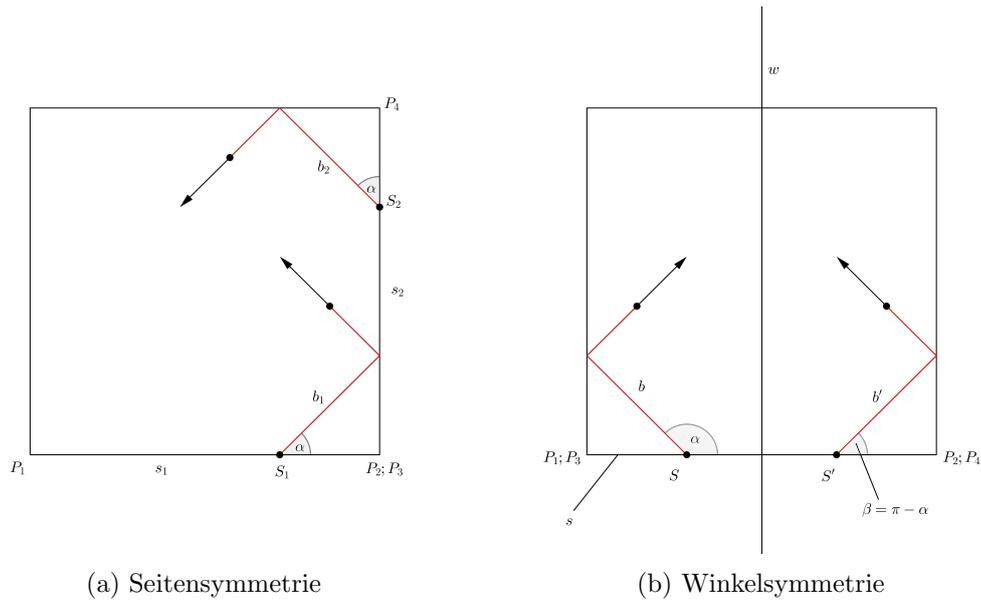


Abbildung 4

Aufgrund der Seitensymmetrie und der Winkelsymmetrie werden fortan in dieser Arbeit Billardbahnen in regelmässigen Polygonen mit folgenden Einschränkungen betrachtet:

- (1) Seitensymmetrie: b_1 mit S_1 als Startpunkt, S_1 liege auf der Seite s_1 . P_1 sei im Koordinatensystem A der linke Eckpunkt von s_1 . b_2 mit S_2 als Startpunkt, S_2 liege auf der Seite s_2 . P_2 sei im Koordinatensystem A der linke Eckpunkt von s_2 . Der Abschusswinkel ist bei b_1 und b_2 gleich. Zusätzlich gilt: $\overline{P_1 S_1} = \overline{P_2 S_2}$. $S' := \overline{P_1 S_1} = \overline{P_2 S_2}$. Es folgt: $S' \in [0, 1]$ und b_1 ist deckungsgleich zu b_2 . Nur der Wert von S' beeinflusst die Form der Billardbahn und nicht die Position der Abschussseite. Deshalb betrachten wir Billardbahnen in regelmässigen Polygonen als abhängig von $S' \in [0, 1]$.
- (2) Winkelsymmetrie: Es gibt für jede Billardbahn mit Abschusswinkel $\alpha \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ eine deckungsgleiche Billardbahn mit $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Daher betrachten wir von jetzt an die Billardbahn als abhängig von $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Somit beschränken wir den Abschusswinkel auf $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$ und den Startpunkt auf $S \in [0, 1]$.

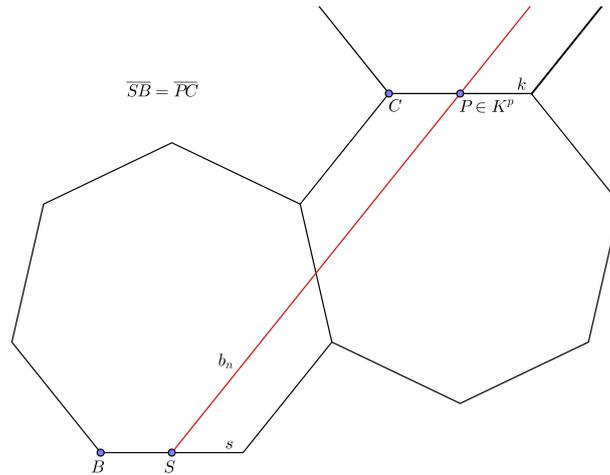


Abbildung 5: Element der Menge K^p im Netz eines regelmässigen Siebenecks

Definition 8. (Menge K^p einer Billardbahn im Netz b_n) P sei ein Schnittpunkt zwischen b_n und einer zur Startseite parallelen Seite des Netzes von b_n . Betrachtet im Koordinatensystem A sei B der linke Eckpunkt von s . P liege auf der Seite k . k ist parallel zu s . C sei der linke Eckpunkt von k . P ist ein Element der Menge K^p , falls gilt: (Abbildung 5)

$$(1) \overline{SB} = \overline{PC}$$

Da k parallel zu s ist, ist der Winkel zwischen b_n und k gleich wie der Abschusswinkel. Wegen dieser Eigenschaft und der Abstandseigenschaft (1) ist jedes Element der Menge K^p sozusagen eine Kopie des Startpunktes im Netz.

Lemma 1. Für alle regelmässigen Polygone gilt: Ist $K^p \neq \{\}$, so hat die Menge K^p unendlich viele Elemente.

Beweis. Zu t_1 sei die Billardkugel im Netz Element der Menge K^p . Aus den Eigenschaften der Menge K^p folgt: Die Bahn der Billardkugel von $t = 0$ bis t_1 ist gleich wie die Bahn der Billardkugel von t_1 bis $2 \cdot t_1$. Somit ist die Billardkugel zu $2 \cdot t_1$ Element der Menge K^p . Nun setzen wir $t_1 = 2 \cdot t_1$ und führen die gleiche Argumentationskette nochmals durch und erhalten ein weiteres Element der Menge K^p . Dies geht unendlich oft. \square

Lemma 2. Für alle regelmässigen Polygone gilt: Ist b_n zugehörig zu einer periodischen Billardbahn in einem regelmässigen Polygon, so ist die Menge K^p von b_n nicht leer.

Beweis. Nach der Definition einer periodischen Billardbahn wissen wir, dass für die Billardbahn zu einem Zeitpunkt, nennen wir ihn t_1 , gilt: $r(S, \vec{v}, t_1) = (S, \vec{v})$. Es folgt, dass auch zu $2 \cdot t_1$ gilt: $r(S, \vec{v}, 2 \cdot t_1) = (S, \vec{v})$. Das Hauptargument des Beweises ist: Die Billardkugel legt innerhalb des Polygons von 0 bis t_1 genau die gleiche Bahn zurück wie von t_1 bis $2 \cdot t_1$. Die Billardkugel im Netz sei zu t_1 der Punkt P_1 . Die Billardkugel im

Netz sei zu $2 \cdot t_1$ der Punkt P_2 . Nun wird gezeigt, $P_2 \in K^p$. Die Teilstrecken zwischen den Schnittpunkten des Netzes mit der Billardbahn von 0 bis t_1 sind gleich wie die Teilstrecken zwischen den Schnittpunkten des Netzes mit der Billardbahn von t_1 bis $2 \cdot t_1$. Wir beweisen folgende Teilaussagen, die zeigen, dass $P_2 \in K^p$:

- (1) P_2 befindet sich auf einer Seite parallel zu der Startseite. *Beweis.* Befindet sich P_1 auf einer Seite parallel zur Startseite ist dies der Fall. Befindet sich P_1 nicht auf einer Seite parallel zur Startseite gilt: Der Weg der Billardkugel im Netz von S zu P_1 ist gleich wie von P_1 zu P_2 . Da von S zu P_1 die Billardkugel sich von der Startseite zu einer Seite nicht parallel zu der Startseite fortbewegt gilt: Die Seite, auf der sich P_1 befindet, ist **nicht** parallel zu der Seite von P_2 .

Die Billardbahn im Netz habe den Abschusswinkel α . Seiten auf denen sich P_1 oder P_2 befinden, müssen die Billardbahn im Winkel α schneiden, damit die Billardbahn im Polygon von t_1 bis $2 \cdot t_1$ die genau gleiche Bahn zurücklegen kann wie von 0 bis t_1 . Dafür kommen nur zwei Drehungen der Seite in Frage, wobei die Startseite in einer dieser Drehungen gedreht ist und die Seite auf der sich P_1 befindet in der anderen. Daraus folgt: P_2 ist gleich wie die Startseite gedreht und somit parallel.

- (2) P_2 hat die richtigen Teilabstände für die Menge K^p . *Beweis.* Da zu $2 \cdot t_1$ die Billardkugel im Polygon sich auf dem Startpunkt befindet, muss die Billardkugel im Netz sich auf einer Spiegelung des Startpunktes auf einer zur Startseite parallelen Seite befinden. i sei der Abstand zwischen Startpunkt und linkem Eckpunkt der Startseite. Da bei der Entstehung des Netzes der Startpunkt mitsamt dem Polygon, auf dem er liegt, an Geraden reflektiert wird, jedoch der Abstand zwischen Startpunkt und linker Eckpunkt erhalten bleibt, kommen pro parallele Seite des Netzes maximal zwei Punkte in Frage: Die Punkte mit Abstand i und $1 - i$ zu dem linken Eckpunkt sind Kandidaten für P_2 . Jedoch nur für den Punkt mit Abstand i zum linken Eckpunkt gilt, dass die Strecke vom Startpunkt zum ersten Schnittpunkt der Billardbahn mit dem Netz gleich ist, wie von P_2 zum nächsten Schnittpunkt der Billardbahn mit dem Netz. Dies muss gelten, da die Billardbahn periodisch ist. P_2 ist somit $\in K^p$

□

Somit gilt: b_n zugehörig zu einer periodischen Billardbahn hat eine Menge K^p mit unendlich vielen Elementen.

Definition 9. (Menge L abhängig von einer Menge K^p) Das Netz einer Billardbahn ist durch Geradenspiegelungen entstanden. K_i sei $\in K^p$. $K_i \in$ eines Polygon des Netzes von b_n . Nun wird der Prozess der Entstehung des Netzes umgedreht. Also das Netz wird wieder zum Urpolygon *zurückgeklappt* oder anders gesagt die Polygone werden mit Geradenspiegelungen auf das *Urpolygon* zurück gespiegelt. So auch das Polygon, von welchem K_i ein Element ist. Alle Elemente des Urpolygons auf denen sich durch diesen Prozess ein zurückgeklapptes Element der Menge K^p befindet, sind $\in L$. (Abbildung 6)

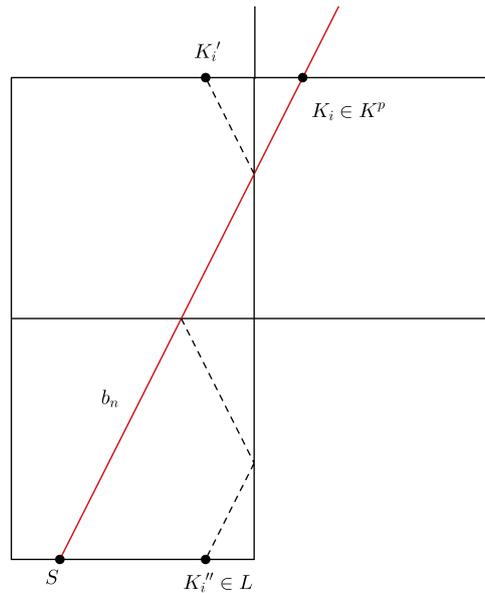


Abbildung 6

Die Abstandseigenschaft der Elemente der Menge K^P bleibt bei den Geradenspiegelungen erhalten. Daher kommen pro Seite des regelmässigen Polygons nur zwei Punkte für die Menge L in Frage. Es folgt: Die Menge L hat eine endliche Anzahl Elemente.

Satz 2. *Für alle regelmässigen Polygone gilt: Eine Billardbahn ist genau dann periodisch, wenn die Menge K^P der zugehörigen Billardbahn im Netz nicht leer ist.*

Beweis. Unterscheiden wir die beiden Aussagen:

- (1) Ist eine Billardbahn periodisch, ist die Menge K^P der zugehörigen Billardbahn im Netz nicht leer ist: Dies wurde in Lemma 2 bewiesen.
- (2) Ist die Menge K^P nicht leer, ist die zugehörige Billardbahn im Polygon periodisch: Nach Lemma 1 hat demnach die Menge K^P unendlich viele Elemente. Daraus folgt: Zu unendlich vielen verschiedenen Zeitpunkten ist die Billardbahn im Polygon Element der Menge L . Da die Menge L jedenfalls eine endliche Anzahl Elemente hat, gilt: Es existieren zwei ungleiche Zeitpunkte $t_1, t_2 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, für die Position und Bewegungsvektor der Billardkugel gleich sind. Daraus folgt, dass die Billardbahn periodisch ist.

□

Satz 3. Für den Abschusswinkel α einer **periodischen** Billardbahn innerhalb eines regelmässigen Polygons mit Seitenzahl n gilt für $a_i \in \mathbb{Z}$; $b_i \in \mathbb{Z}$:

$$\tan(\alpha) = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} a_i \cdot \sin(i \cdot \frac{2\pi}{n})}{\sum_{i=0}^{n-1} b_i \cdot \cos(i \cdot \frac{2\pi}{n})} \quad (2)$$

Beweis. Nach Satz 2 gilt: Eine Billardbahn ist genau dann periodisch, falls die Menge K^p der zugehörigen Billardbahn im Netz nicht leer ist. Somit ist das allgemeine Untersuchen der Menge K^p von Interesse. Der Beweis des Satzes beantwortet die Frage: Für das Netz eines regelmässigen Polygons mit Seitenzahl n , wo können sich überall Elemente der Menge K^p befinden? Zeigen wir folgende Teilaussagen:

- (1) Im Netz des regelmässigen Polygons gilt: Jede Seite des Netzes ist parallel zu einer der Seiten des Startpolygons. *Beweis.* Vollständige Induktion. Nummerieren wie die Polygone eines Netzes ihrer von der Billardkugel durlaufenden Reihenfolge nach. Es gilt: Das n -te und $n + 1$ -te Polygon teilen sich eine Seite. So auch das erste und das zweite. Da die Innenwinkel aller Polygone eines Netzes gleich sind, sind die Seiten des zweiten Polygons Drehungen um den Innenwinkel des Polygons der Seite, die sich das erste mit dem zweiten Polygon teilt. Das gilt auch für das erste Polygon. Damit hat jede Seite des zweiten Polygons eine parallel Seite im ersten Polygon. Dies gilt auch für das n -te und $n + 1$ -te Polygon.
- (2) Die Y-Koordinaten jedes Elementes der Menge K^p im Koordinatensystem A sind gleich Summen von ganzzahligen Vielfachen von Sinusen der Winkel der Seiten des Startpolygons. Für die X-Koordinaten sind es Summen von ganzzahligen Vielfachen von Cosinusen der Winkel der Seiten des Startpolygons. (Abbildung 7) Dies gilt, da das Element der Menge K^p Teil des Netzes ist und Aussage (1) gilt.
- (3) Die Winkel der Seiten des Startpolygons zur X-Achse des Koordinatensystems A sind der Form $(i \cdot \frac{2\pi}{n})$: Der Startpunkt befinde sich auf der Seite s_0 . Nun nummerieren wir die Seiten im Gegenuhrzeigersinn mit s_1, s_2, \dots, s_{n-1} . β_i sei der Winkel zwischen der X-Achse und s_i . Somit ist β_0 gleich 0. Nach Abbildung 8 gilt für $\beta_i - \beta_{i-1} = \frac{2\pi}{n}$, mit $i \in \mathbb{N}$ und $i \in [1, n - 1]$. Somit ist β_i gleich $i \cdot \frac{2\pi}{n}$.

Da alle Seitenlängen gleich 1 sind, sind alle Sinuse und Cosinuse der Winkel der Seiten des Startpolygons im Koordinatensystem B Sinuse und Cosinuse der Winkel β_i . Nun wissen wir, dass die Y-Koordinaten aller Elemente der Menge K^p im Koordinatensystem A sich als Summe ganzzahliger Vielfacher der Sinuse von β_i berechnen lassen, für die X-Koordinate sind es die Cosinuse. Der Tangens des Abschusswinkel ist die Y-Koordinate geteilt durch die X-Koordinate des Elementes der Menge K^p . Die gesuchte Relation ergibt sich. \square

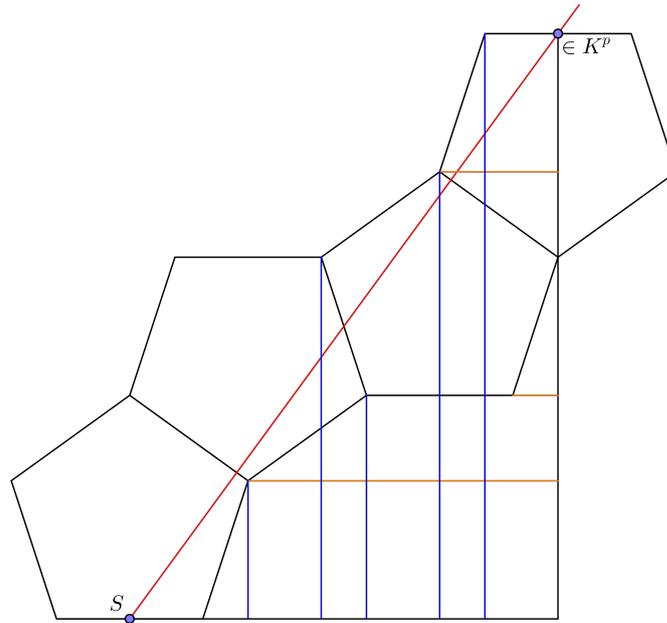


Abbildung 7: Element der Menge K^p

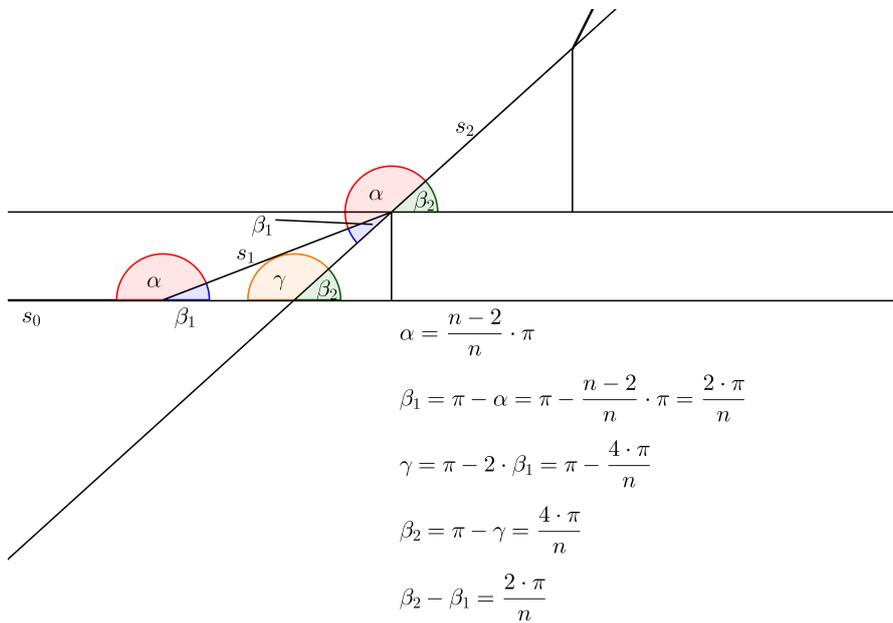


Abbildung 8: Der Unterschied zwischen β_1 und β_2

Wegen der folgenden Relationen gilt Korollar 1, 2, 3 und 4.

$$\begin{aligned}\sin(\alpha) &= |\sin(\pi + \alpha)| \\ \cos(\alpha) &= |\cos(\pi + \alpha)| \\ \sin(\pi + \alpha) &= |\sin(\pi - \alpha)| \\ \cos(\pi + \alpha) &= |\cos(\pi - \alpha)| \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) &= \left|\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right| \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) &= \left|\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right|\end{aligned}$$

Korollar 1. Für den Abschusswinkel α einer *periodischen* Billardbahn innerhalb eines regelmässigen Polygons mit Seitenzahl n , **wobei n gerade ist**, gilt für $a_i \in \mathbb{Z}$; $b_i \in \mathbb{Z}$:

$$\tan(\alpha) = \frac{\sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} a_i \cdot \sin\left(i \cdot \frac{2\pi}{n}\right)}{\sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} b_i \cdot \cos\left(i \cdot \frac{2\pi}{n}\right)} \quad (3)$$

Korollar 2. Für den Abschusswinkel α einer *periodischen* Billardbahn innerhalb eines regelmässigen Polygons mit Seitenzahl n , **wobei n ungerade ist**, gilt für $a_i \in \mathbb{Z}$; $b_i \in \mathbb{Z}$:

$$\tan(\alpha) = \frac{\sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}} a_i \cdot \sin\left(i \cdot \frac{2\pi}{n}\right)}{\sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}} b_i \cdot \cos\left(i \cdot \frac{2\pi}{n}\right)} \quad (4)$$

Korollar 3. Für den Abschusswinkel α einer *periodischen* Billardbahn innerhalb eines regelmässigen Polygons mit Seitenzahl n , **wobei n durch 4 teilbar ist**, gilt für $a_i \in \mathbb{Z}$; $b_i \in \mathbb{Z}$:

$$\tan(\alpha) = \frac{\sum_{i=0}^{\frac{n}{4}} a_i \cdot \sin\left(i \cdot \frac{2\pi}{n}\right)}{\sum_{i=0}^{\frac{n}{4}} b_i \cdot \cos\left(i \cdot \frac{2\pi}{n}\right)} \quad (5)$$

Korollar 4. Für den Abschusswinkel α einer *periodischen* Billardbahn innerhalb eines regelmässigen Polygons mit Seitenzahl n , **wobei n durch 6 aber nicht durch 4 teilbar**

ist, gilt für $a_i \in \mathbb{Z}; b_i \in \mathbb{Z}$:

$$\tan(\alpha) = \frac{\sum_{i=0}^{\frac{n-2}{4}} a_i \cdot \sin(i \cdot \frac{2 \cdot \pi}{n})}{\sum_{i=0}^{\frac{n-2}{4}} b_i \cdot \cos(i \cdot \frac{2 \cdot \pi}{n})} \quad (6)$$

Anmerkung. Es wird nun eine Möglichkeit beschrieben, wie man Korollar 1, 2, 3 und 4 geometrisch verstehen kann.

- (1) n gerade: Jede Seite im regelmässigen Polygon hat eine gegenüberliegende parallele Seite. Die Sinuse und Cosinuse von Winkeln von gegenüberliegenden Seiten sind im Betrag gleich. Daher lassen sich die Koordinaten der Elemente der Menge K^p allgemein durch Summen von Sinusen und Cosinusen der Winkel der Seiten s_0 bis $s_{\frac{n}{2}-1}$ berechnen.
- (2) n ungerade : Eine Symmetrieachse des Polygons ist senkrecht zur Startseite und verläuft durch den gegenüberliegenden Eckpunkt. Spiegelt man eine Seite des Polygons an dieser Achse ist die gespiegelte Seite auch Teil des Polygons. Von den Winkeln dieser Seiten sind die Sinuse und Cosinuse im Betrag gleich. Daher gilt Gleichung (4).
- (3) n durch vier teilbar: n ist gerade, deswegen gilt auch (1). Zusätzlich gibt es noch eine Symmetrieachse, welche durch die Mittelpunkte der Seiten $s_{\frac{n}{4}}$ und $s_{\frac{3 \cdot n}{4}}$ verläuft. Daher ist die Seite $s_{\frac{n}{4}-i}$ eine Spiegelung der Seite $s_{\frac{n}{4}+i}$. Diese Symmetrieachse ist parallel zur X-Achse. Somit sind die Beträge der Sinuse und Cosinuse der Seiten $s_{\frac{n}{4}-i}$ und $s_{\frac{n}{4}+i}$ gleich. Daher gilt Gleichung (5).
- (4) n durch vier aber nicht durch 6 teilbar: n ist gerade, deswegen gilt auch (1). Zusätzlich gibt es noch eine Symmetrieachse, welche durch den Eckpunkt zwischen der Seite $s_{\frac{n-2}{4}}$ und $s_{\frac{n+2}{4}}$ und den Eckpunkt zwischen der Seite $s_{\frac{3 \cdot n-2}{4}}$ und $s_{\frac{3 \cdot n+2}{4}}$ verläuft. Diese Symmetrieachse ist parallel zur X-Achse. Somit sind die Beträge der Sinuse und Cosinuse der Seiten $s_{\frac{n-2}{4}-i}$ und $s_{\frac{n+2}{4}+i}$ gleich. Daher gilt Gleichung (6).

Anmerkung. Zwar ist der Tangens jedes Abschusswinkels einer periodischen Billardbahn gleich einem gewissen Quotienten aus Gleichung (2), jedoch sind nicht alle Quotienten aus Gleichung (2) Tangens von Abschusswinkeln periodischer Billardbahnen. Das gleiche gilt für die Gleichungen (3),(4),(5) und (6). Die einzigen Ausnahmen bilden das regelmässige Dreieck, Viereck und Sechseck. Nur diese regelmässigen Polygone parkettieren die Ebene und deshalb sind alle Elemente der Menge K^p durch die Position der Seiten der Parkettierung ausfindig zu machen. Dies führen wir in den folgenden Seiten aus. Zusätzlich zeigen wir ein paar periodische Billardbahnen im regelmässigen Fünfeck und Achteck.

2.1 Regelmässiges Dreieck

Betrachten wir die Menge K^p im Koordinatensystem A als Teilmenge der Parkettierung. Die Abbildung 9 veranschaulicht alle Mengen K^p zu einem gegebenen Startpunkt. Punkte der Menge K^p liegen auf Koordinaten $(\frac{n}{2}, \frac{m\sqrt{3}}{2})$ mit $n \in \mathbb{N}_0$ und $m \in \mathbb{N}_{>0}$, jedoch mit den Bedingungen dass wenn $n \in \{2x|x \in \mathbb{N}_0\}$, dass dann $m \in \{2x|x \in \mathbb{N}_{>0}\}$ und dass wenn $n \in \{2x+1|x \in \mathbb{N}_0\}$, dass dann $m \in \{2x+1|x \in \mathbb{N}_0\}$. Abbildung 9 veranschaulicht diesen unbewiesenen Sachverhalt.

$K_i \in K^p$. S' sei der Punkt auf der X-Achse mit kleinstem Abstand zu K_i . Betrachten wir das Dreieck $\triangle SK_iS'$. Eine Bahn ist periodisch, wenn für $l \in \mathbb{R}$, $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$ und für $n \in \mathbb{N}_0$ und $m \in \mathbb{N}_{>0}$ mit den Bedingungen: $n \in \{2x|x \in \mathbb{N}_0\} \Leftrightarrow m \in \{2x|x \in \mathbb{N}_{>0}\}$ und $n \in \{2x+1|x \in \mathbb{N}_0\} \Leftrightarrow m \in \{2x+1|x \in \mathbb{N}_0\}$ gilt:

$$l \cdot \sin(\alpha) = m \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$l \cdot \cos(\alpha) = n \cdot \frac{1}{2}$$

Und in Kombination für $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ und $n \neq 0$:

$$\tan(\alpha) = \sqrt{3} \cdot \frac{m}{n}$$

Jeder Bruch $\frac{a}{b}$ mit $a, b \in \mathbb{N}$ kann in die Form $\frac{m}{n}$ mit $m, n \in \{2x|x \in \mathbb{N}\}$ gebracht werden, indem man ihn mit $\frac{2}{2}$ multipliziert. Somit ist für jeden Abschusswinkel einer Billardbahn im regelmässigen Dreieck die Billardbahn genau dann periodisch, falls der Tangens des Abschusswinkels äquivalent zu einem Produkt aus $\sqrt{3}$ und einem Element von \mathbb{Q} ist. Für $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ist die Billardbahn periodisch und für $\alpha = 0$ trifft sie einen Eckpunkt. Abbildung 10-15 veranschaulichen verschiedene periodische Billardbahnen im gleichseitigen Dreieck.

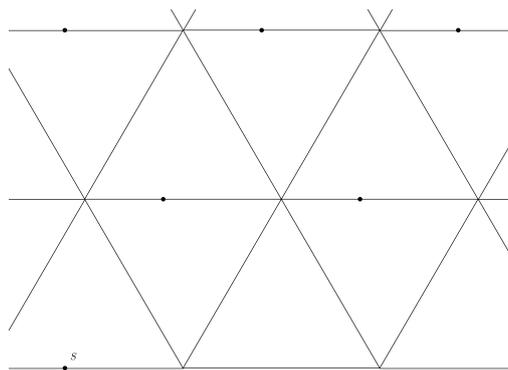
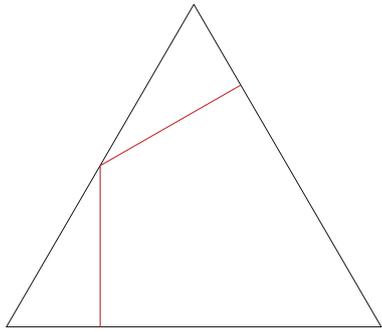
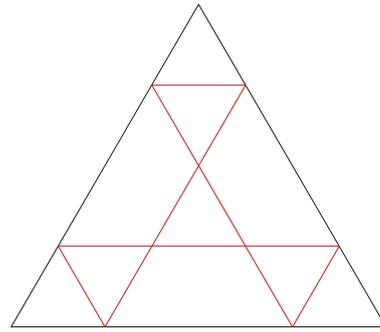
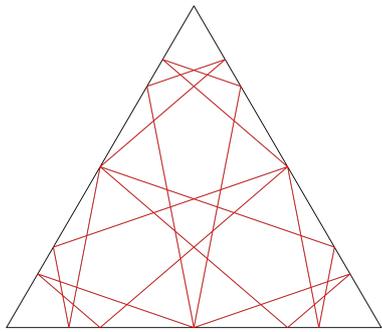
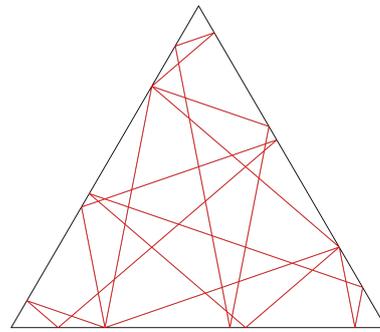
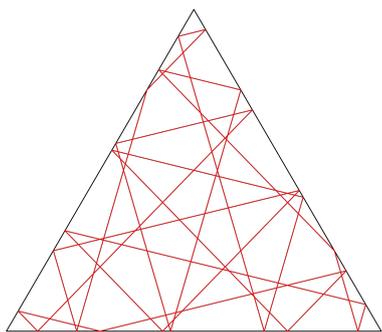
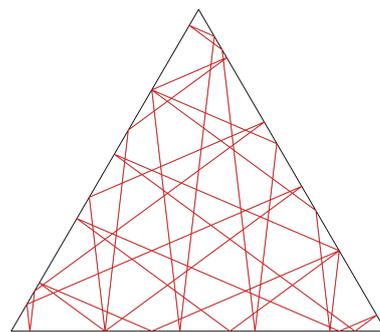


Abbildung 9

Abbildung 10: $S = 0.25$; $\alpha = \frac{\pi}{2}$ Abbildung 11: $S = 0.25$; $\alpha = \frac{\pi}{3}$ Abbildung 12: $S = 0.25$; $\alpha = \tan^{-1}(\frac{\sqrt{3}}{2})$ Abbildung 13: $S = 0.25$; $\alpha = \tan^{-1}(\frac{\sqrt{3}}{5})$ Abbildung 14: $S = 0.25$; $\alpha = \tan^{-1}(\frac{\sqrt{3}}{7})$ Abbildung 15: $S = 0.25$; $\alpha = \tan^{-1}(\frac{3\sqrt{3}}{7})$

2.2 Quadrat

Betrachten wir die Menge K^p als Teilmenge der Parkettierung der Ebene. Abbildung 16 veranschaulicht alle Mengen K^p zu einem gegebenen Startpunkt.

Aus Abbildung 16 folgt: Wenn ein Element der Billardbahn b_n im Koordinatensystem A ganzzahlige Koordinaten hat, dann ist b periodisch. Betrachten wir nun im Koordinatensystem A eine Billardbahn im Netz b_n mit Startpunkt $S = (0, 0)$. $K_i \in K^p$. $l = \overline{SK_i}$. Betrachten wir das rechtwinklige Dreieck mit den drei Eckpunkten $S = (0, 0)$, $K_i = (m, n)$ mit $m, n \in \mathbb{N}$ und S' der Punkt auf der X -Achse mit kleinstem Abstand zu S : $S' = (m, 0)$. $\overline{K_i S'}$ ist gleich n und $\overline{SS'}$ ist gleich m , wie Abbildung 16 es veranschaulicht. Somit gilt für $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$ und $l \in \mathbb{R}$:

$$l \cdot \sin(\alpha) = n$$

$$l \cdot \cos(\alpha) = m$$

Daraus folgt aus Kombination der beiden Bedingungen für $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ und $m \neq 0$:

$$\tan(\alpha) = \frac{n}{m}$$

Dies bedeutet, wenn der Tangens des Abschusswinkels einer Billardbahn b Element von \mathbb{Q} ist, dann ist ein Element von b_n Element der Menge K^p und somit die Billardbahn b mit Abschusswinkel α periodisch.

Für $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ist die Billardbahn periodisch. Für $\alpha = 0$ ist der erste Randberührungspunkt ein Eckpunkt und daher ist die Billardbahn nicht periodisch. Abbildung 18-23 veranschaulichen verschiedene periodische Billardbahnen im Quadrat.

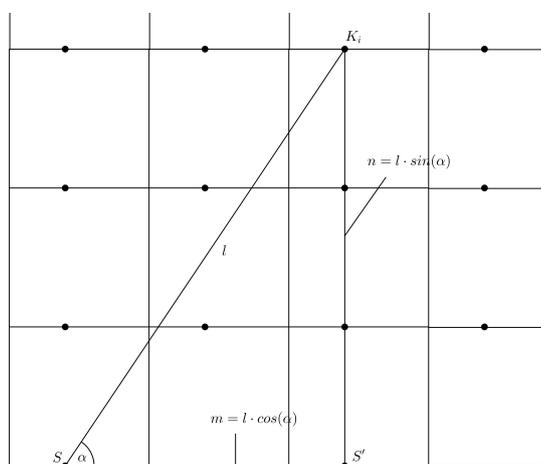


Abbildung 16

Lemma 3. *Die Anzahl Elemente einer Menge L einer periodischen Billardbahn im Quadrat ist kleiner gleich 2. (Abbildung 17)*

Beweis. (Beweis-Skizze) Betrachten wir Abbildung 17. $L_1 - L_4$ sind die alle möglichen Elemente einer Menge L zu einem gegebenen Startpunkt, in der Abbildung $S = 0.25$. Zu t_1 sei die Billardbahn zum ersten Mal nach $t = 0$ Element der Menge L . Ist $r'(S, \alpha, t_1) = L_2, L_3$ oder L_4 , so ist $r'(S, \alpha, 2 \cdot t_1) = S$ und die Menge L hat zwei Elemente. Ist $r'(S, \alpha, t_1) = L_1 = S$ so hat die Menge L ein Element. \square

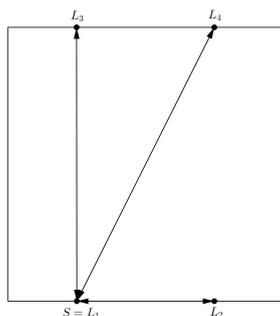


Abbildung 17

Lemma 4. *Die Menge L einer periodischen Billardbahn im Quadrat hat mehr als ein Element.*

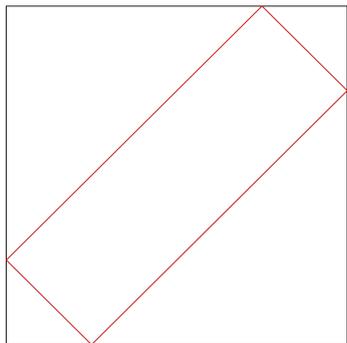
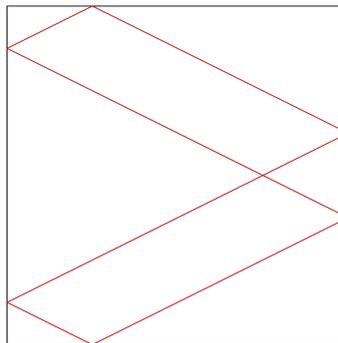
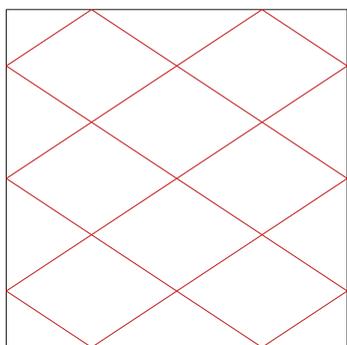
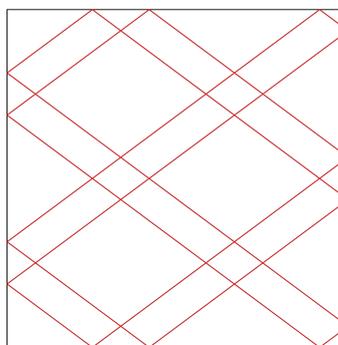
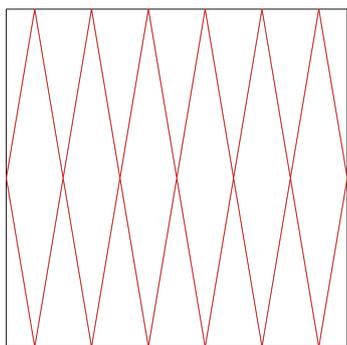
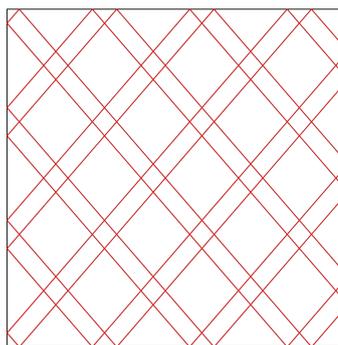
Beweis. $\tan(\alpha) = \frac{n}{m}$ mit $\text{ggt}(n, m) = 1$. t_1 sei der Zeitpunkt bei dem zum ersten Mal nach $t = 0$ $r(S, \alpha, t_1) = (S, \alpha)$. $r'_n(S, \alpha, t_1)$ ist eine Spiegelung von S im Netz, sprich ein Punkt S_x . Alle Punkte S_x , welche Element von K^p sind, haben Koordinaten (x, y) (Betrachtet im Koordinatensystem A) mit x, y beide gerade natürliche Zahlen. Der Punkt mit den Koordinaten (n, m) ist das erste Element der Menge K^p der Billardbahn, jedoch kein Punkt S_x . Somit hat die Menge L mehr als ein Element. \square

Aus **Lemma 3** und **Lemma 4** folgt **Korollar 5** und **Korollar 6**

Korollar 5. *Die Menge L einer periodischen Billardbahn im Quadrat hat genau zwei Elemente.*

Korollar 6. *Für die Periodenzahl p einer periodischen Billardbahn im Quadrat mit Abschusswinkel $\alpha = \tan^{-1}(\frac{n}{m})$ und $\text{ggt}(n, m) = 1$ gilt:*

$$p = 2 \cdot (n + m)$$

Abbildung 18: $S = 0.25$; $\alpha = \frac{\pi}{4}$ Abbildung 19: $S = 0.25$; $\alpha = \tan^{-1}(\frac{1}{2})$ Abbildung 20: $S = 0.25$; $\alpha = \tan^{-1}(\frac{2}{3})$ Abbildung 21: $S = 0.25$; $\alpha = \tan^{-1}(\frac{3}{4})$ Abbildung 22: $S = 0.25$; $\alpha = \tan^{-1}(6)$ Abbildung 23: $S = 0.25$; $\alpha = \tan^{-1}(\frac{7}{6})$

2.3 Regelmässiges Fünfeck

Nach Gleichung (3) gilt für das regelmässige Fünfeck:

$$\tan(\alpha) = \frac{a_1 \cdot \sin(\frac{\pi}{5}) + a_2 \cdot \sin(2 \cdot \frac{\pi}{5})}{b_0 + b_1 \cdot \cos(\frac{\pi}{5}) + b_2 \cdot \cos(2 \cdot \frac{\pi}{5})}$$

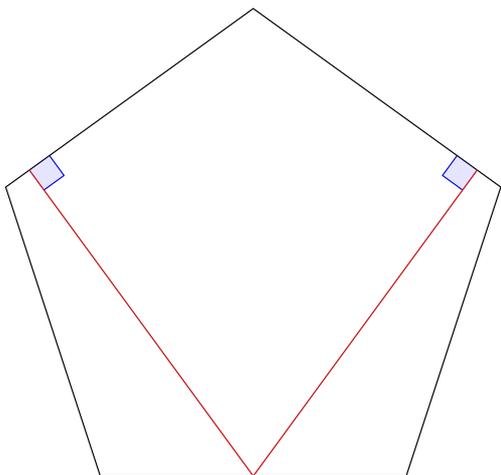


Abbildung 24: $S = 0.5$; $\alpha = \frac{3 \cdot \pi}{10}$

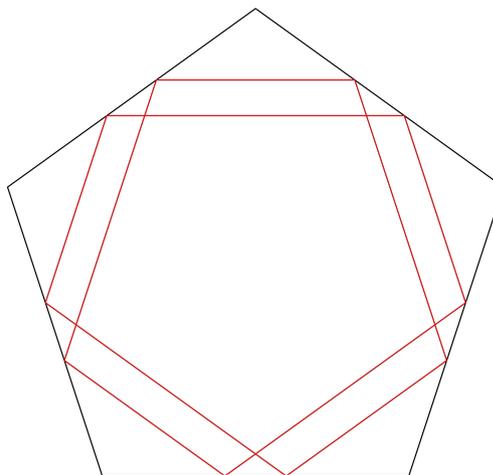


Abbildung 25: $S = 0.4$; $\alpha = \frac{2 \cdot \pi}{10}$

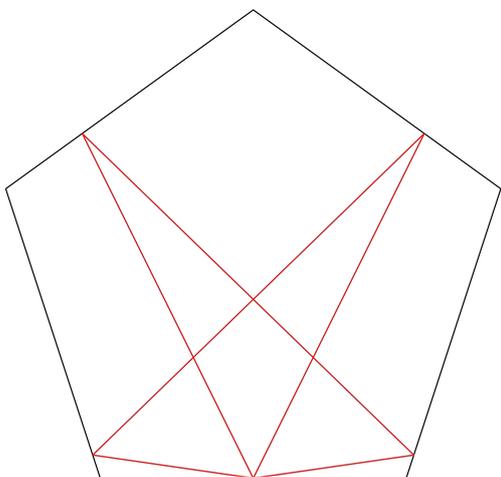


Abbildung 26: $S = 0.5$; $\alpha \approx 1.112338$

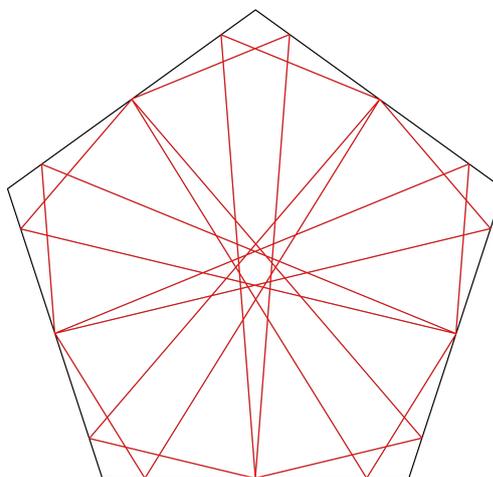


Abbildung 27: $S = 0.8625$; $\alpha \approx 1.019$

2.4 Regelmässiges Sechseck

Betrachten wir die Menge K^p im regelmässigen Sechseck. Alle Elemente der Menge K^p im Koordinatensystem A haben die Koordinaten $(n \cdot \frac{3}{2}, m \cdot \frac{\sqrt{3}}{2})$ mit $n \in \mathbb{N}_0$ und $m \in \mathbb{N}_{>0}$ mit den Bedingungen: $n \in \{2x|x \in \mathbb{N}_0\} \Leftrightarrow m \in \{2x|x \in \mathbb{N}_{>0}\}$ und $n \in \{2x+1|x \in \mathbb{N}_0\} \Leftrightarrow m \in \{2x+1|x \in \mathbb{N}_0\}$. An den Leser wird appelliert, sich von dieser Tatsache selbst zu überzeugen mit Hilfe von Abbildung 28.

Nun betrachten wir wieder das Dreieck $\triangle SK_i S'$ mit $K_i \in K^p$. Eine Bahn ist somit periodisch, wenn für $l \in \mathbb{R}$, $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$ und für $n, m \in \mathbb{N}$ mit den Bedingungen: $n \in \{2x|x \in \mathbb{N}_0\} \Leftrightarrow m \in \{2x|x \in \mathbb{N}_{>0}\}$ und $n \in \{2x+1|x \in \mathbb{N}_0\} \Leftrightarrow m \in \{2x+1|x \in \mathbb{N}_0\}$ gilt:

$$l \cdot \sin(\alpha) = m \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$l \cdot \cos(\alpha) = n \cdot \frac{3}{2}$$

Und in Kombination für $\alpha \in (0, \pi/2)$ und $n \neq 0$:

$$\tan(\alpha) = \sqrt{3} \cdot \frac{m}{3 \cdot n}$$

Jeder Bruch $\frac{a}{b}$ mit $a, b \in \mathbb{N}$ kann in die Form $\frac{m}{3 \cdot n}$ mit $m, n \in \{2x|x \in \mathbb{N}\}$ gebracht werden, indem man ihn mit $\frac{2 \cdot 3}{2 \cdot 3}$ multipliziert. Somit ist für jeden Abschusswinkel einer Billardbahn im regelmässigen Sechseck die Billardbahn genau dann periodisch, falls der Tangens des Abschusswinkels äquivalent zu einem Produkt aus $\sqrt{3}$ und einem Element von \mathbb{Q} ist. Abbildung 29-34 veranschaulichen verschiedene periodische Billardbahnen im gleichseitigen Sechseck.

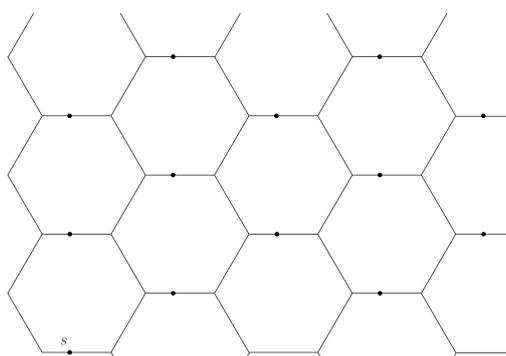


Abbildung 28

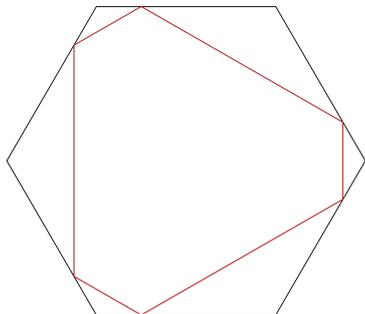


Abbildung 29: $S = 0.25$; $\alpha = \frac{\pi}{6}$

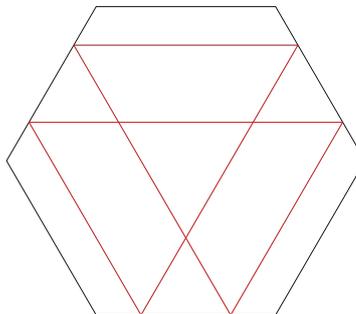


Abbildung 30: $S = 0.25$; $\alpha = \frac{\pi}{3}$

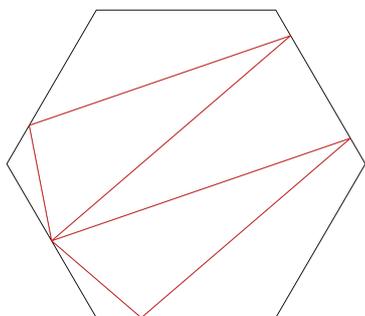


Abbildung 31: $S = 0.25$; $\alpha = \tan^{-1}(\frac{\sqrt{3}}{2})$

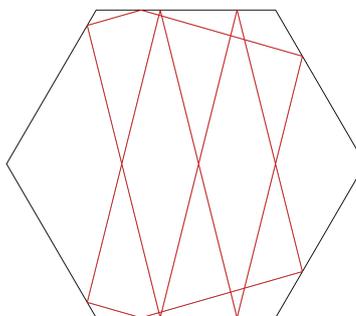


Abbildung 32: $S = 0.25$; $\alpha = \tan^{-1}(\frac{\sqrt{3}}{6})$

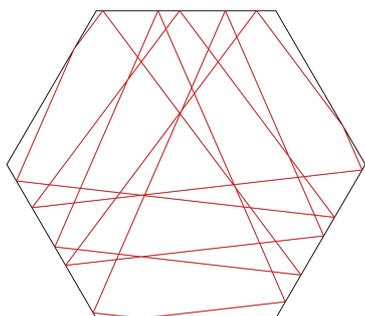


Abbildung 33: $S = 0.25$; $\alpha = \tan^{-1}(\frac{\sqrt{3}}{15})$

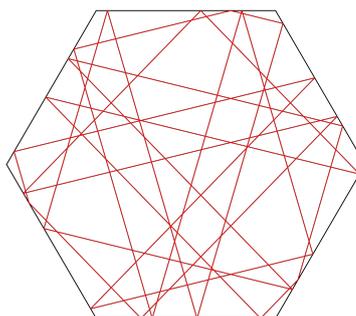


Abbildung 34: $S = 0.25$; $\alpha = \tan^{-1}(\frac{3\sqrt{3}}{5})$

2.5 Regelmässiges Achteck

Nach Gleichung (4) gilt für das regelmässige Achteck:

$$\tan(\alpha) = \frac{a_1 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + a_2}{b_0 + b_1 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}$$

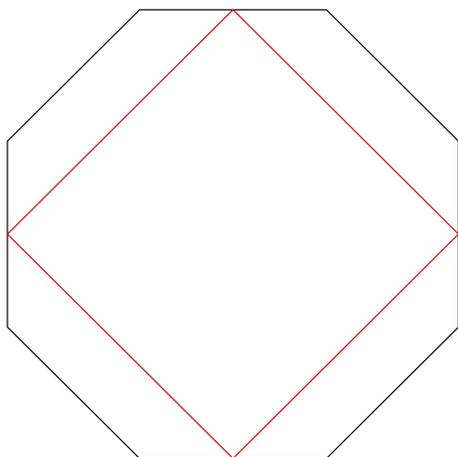


Abbildung 35: $S = 0.5$; $\alpha = \frac{\pi}{4}$

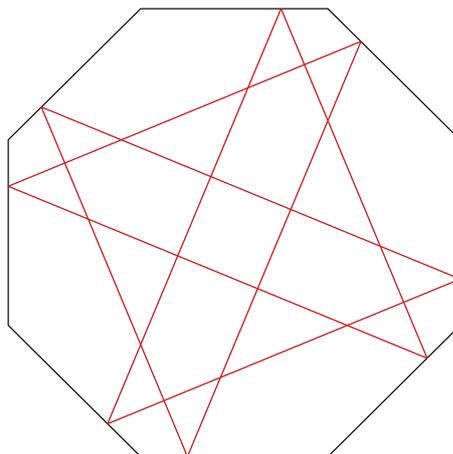


Abbildung 36: $S = \frac{1}{4}$; $\tan(\alpha) = \frac{2+3 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}{1+\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}$

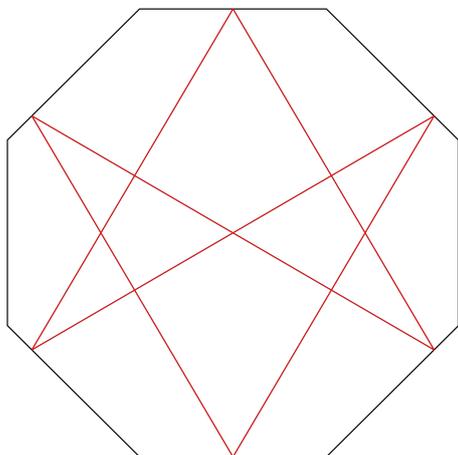


Abbildung 37: $S = 0.5$; $\tan(\alpha) = \frac{3+4 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2+2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}$

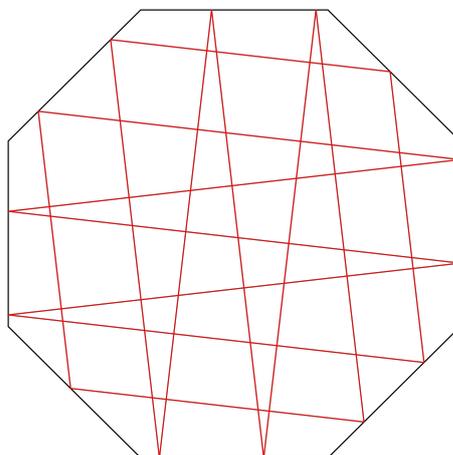


Abbildung 38: $S = 0.1$; $\alpha \approx 1.45579$

3 Periodische Billardbahnen in Gebieten $G \subseteq \mathbb{R}^2$

3.1 Allgemeines Dreieck

Satz 4 und **Satz 5** wurden aus [3] 3. Kapitel Seite 85-89 entnommen. Betrachten wir von einem spitzwinkligen Dreieck ABC das Höhenfusspunkt Dreieck DEF , genannt *Fagnano-Dreieck*, wobei D der Höhenfusspunkt von A ist, E von B und F von C .

Satz 4. Für ein spitzwinkliges Dreieck ABC mit Höhenfusspunkten D von A , E von B und F von C und dem Mittelpunkt M der drei Höhen gilt: $\angle AFE = \angle BFD$, $\angle BDF = \angle CDE$ und $\angle ECD = \angle AEF$. (Abbildung 39)

Beweis. Viereck $\square AFME$ ist ein Sehnenviereck, da die Winkel $\angle AEM$ und $\angle AFM$ beide gleich $\frac{\pi}{2}$ sind. Dies impliziert, dass $\angle EAM = \angle EFM$. Die Dreiecke $\triangle AME$ und $\triangle MBD$ sind ähnlich, da beide einen rechten Winkel haben und $\angle EMA = \angle DMB$, da sie Scheitelwinkel sind. Daraus folgt, dass $\angle EAM = \angle DBM$. Auch $\square BDMF$ ist ein Sehnenviereck, da die Winkel $\angle BDM$ und $\angle BFM$ beide gleich $\frac{\pi}{2}$ sind. Daraus folgt, dass $\angle DBM = \angle DFM$, woraus folgt, dass $\angle EFM = \angle DFM$, da $\angle EFM = \angle EAM = \angle DBM = \angle DFM$. Aus $\frac{\pi}{2} = \angle EFM + \angle AFE$ und $\frac{\pi}{2} = \angle DFM + \angle BFD$, folgt dass $\frac{\pi}{2} - \angle EFM = \angle AFE$ und $\frac{\pi}{2} - \angle DFM = \angle BFD$ und da $\angle EFM = \angle DFM$ folgt, dass $\angle AFE = \angle BFD$. Diese Argumentationskette kann auf jeden der drei Höhenfusspunkte angewendet werden um das gewünschte Resultat zu erhalten. \square

Wegen der in **Satz 4** bewiesenen Eigenschaft kann das Höhenfusspunktdreieck als periodische Billardbahn mit Periodenzahl 3 betrachtet werden.

Satz 5. Das Höhenfusspunktdreieck, ist das Dreieck mit kleinstem Umfang, welches in ein spitzwinkliges Dreieck einbeschrieben werden kann. (Abbildung 40 und 41)

Beweis. Man betrachte zunächst drei Punkte auf den Kanten des Dreiecks $\triangle ABC$. F auf AB , D auf BC und E auf AC . Man spiegle F an der Kante AC und erhalte F' und an der Kante BC und man erhalte F'' . Die Strecke EF und EF' sind gleich lang, ebenso DF und DF'' . Somit ist $\overline{F'E} + \overline{ED} + \overline{DF''}$ gleich des Umfanges des Dreiecks $\triangle DEF$. Die Länge der Strecke $F'F''$ ist die kürzest mögliche Länge für $\overline{F'E} + \overline{ED} + \overline{DF''}$. Also wird die kürzest mögliche Länge erreicht, falls E auf dem Schnittpunkt zwischen AC und $F'F''$ liegt und falls D auf dem Schnittpunkt BC und $F'F''$. Falls dies erfüllt ist, gilt auch $\angle F'EA = \angle CED$, da es Scheitelwinkel sind. Dazu gilt noch $\angle FEA = \angle F'EA$ und daher $\angle FEA = \angle CED$. Dies gilt auch für die Winkel $\angle FDB$ und $\angle CDE$. $\overline{CF} = \overline{CF'} = \overline{CF''}$. Es gilt: $2 \cdot \angle FCA = \angle FCF'$ und $2 \cdot \angle FCB = \angle FCF'' \Leftrightarrow 2 \cdot \angle FCA + 2 \cdot \angle FCB = \angle FCF' + \angle FCF''$ und $\angle FCA + \angle FCB = \angle ACB$ und da $\angle FCF' + \angle FCF'' = \angle F'CF'' \Leftrightarrow 2 \cdot \angle ACB = \angle F'CF''$ und $\angle ACB$ sich nicht verändert. Damit sind alle Dreiecke $\triangle F'CF''$ für alle F auf AB ähnlich und $\triangle F'CF''$ ist gleichschenkelig, da $\overline{CF} = \overline{CF''}$. Somit ist $\overline{F'F''}$ proportional zu \overline{CF} und \overline{CF} ist für F auf dem Höhenfusspunkt von C am kürzesten. Es folgt, dass es genau ein Dreieck mit kürzestem Umfang gibt.

Diese Argumentationskette kann auf alle drei Punkte D, E und F angewendet werden. Jedes Mal befindet sich eines der Eckpunkte des Dreieck mit kleinstem Umfang auf einem der Höhenfusspunkte. Da es nur ein Dreieck mit kleinstem Umfang gibt, ist das Höhenfusspunktdreieck das Dreieck mit kleinstem Umfang. \square

Betrachten wir die Winkel noch einmal genauer. Sei $\angle EFA = \gamma$ und $\angle FEA = \beta$. Somit ist $\angle EAF = \pi - \gamma - \beta = \alpha$. Auch gilt $\angle EFD = \pi - 2\gamma$ und $\angle FED = \pi - 2\beta \Rightarrow \angle EDF = \pi - \angle EFD - \angle FED = 2\gamma + 2\beta - \pi \Rightarrow \angle EDC = \angle BDF = \frac{\pi - \angle EDF}{2} = \frac{2\pi - 2\gamma - 2\beta}{2} = \pi - \gamma - \beta = \alpha$. Diese Argumentationskette kann auf alle drei Höhenfusspunkte angewendet werden. Abbildung 42 dient der Veranschaulichung.

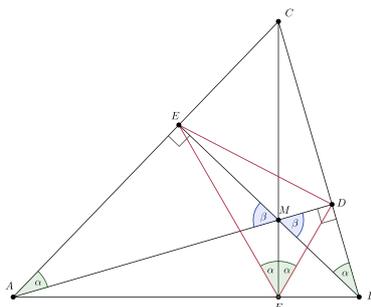


Abbildung 39: Höhenfusspunktdreieck

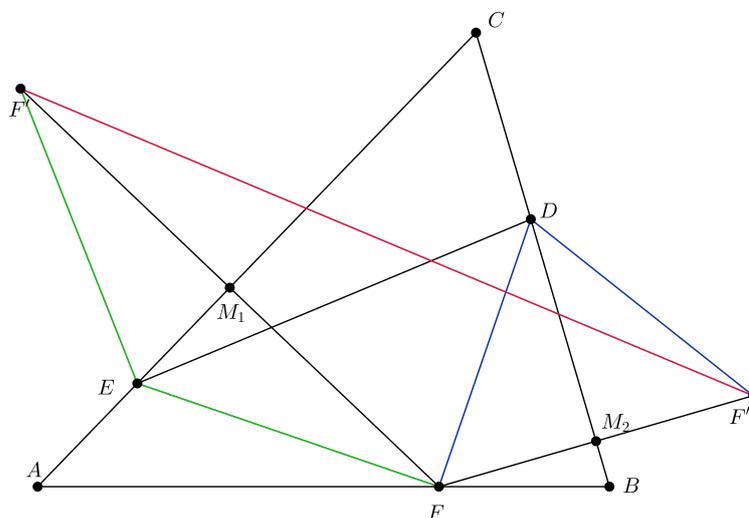


Abbildung 40

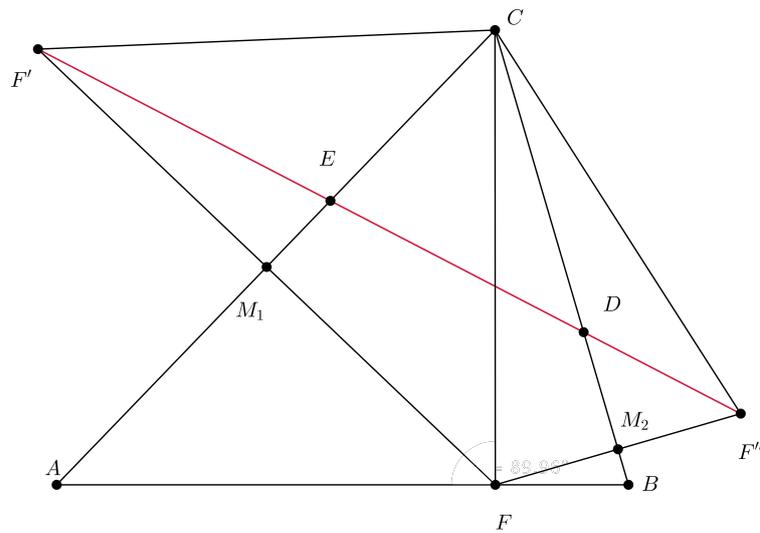


Abbildung 41

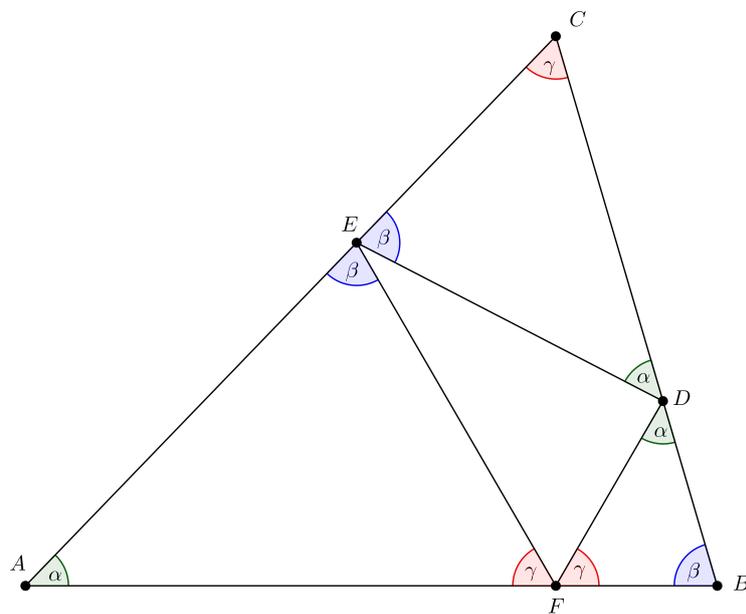


Abbildung 42: Höhenfusspunkt-dreieck

Satz 6. Jedes gleichschenklige Dreieck mit den Ecken A, B, C hat eine periodische Billardbahn mit Periodenzahl 4. (Abbildung 43)

Beweis. $\angle BAC = \angle ABC$. C' sei der Höhenfusspunkt von C auf AB . Die Dreiecke $\triangle ACC'$ und $\triangle BCC'$ sind kongruent und rechtwinklig. H_{ac} sei der Höhenfusspunkt von C' im Dreieck $\triangle ACC'$. H_{bc} sei der Höhenfusspunkt von C' im Dreieck $\triangle BCC'$. Es gilt: $\overline{CH_{ac}} = \overline{CH_{bc}}$ und $\angle H_{ac}CA = \angle H_{bc}CB$. Es folgt. Die Streckenfolge $H_{ac}C'$, $C'H_{bc}$, $H_{bc}C'$ und $C'H_{ac}$ ist eine periodische Billardbahn mit Periodenzahl 4. Die Länge der Streckenabschnitte der periodischen Billardbahn sind alle gleich. \square

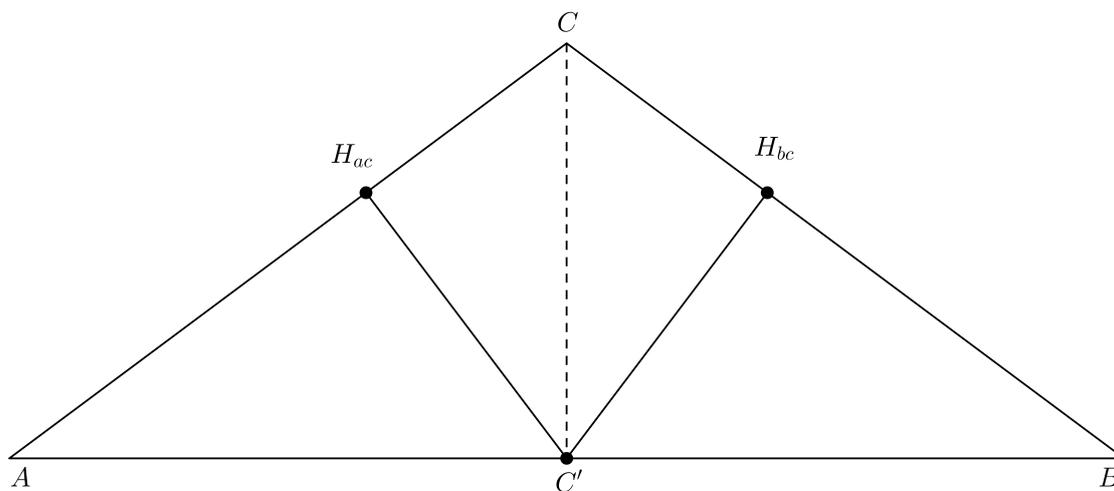


Abbildung 43

3.2 Polygonale Billardbahnen

Diese Kapitel bearbeitet und erweitert die Übung 7.1 aus [5] auf Seite 106. Eine periodische Billardbahn b innerhalb eines Gebietes G ist ein Polygon. Betrachten wir ein konvexes Polygon T , welches wir als periodische Billardbahn sehen. Welche Gebiete G haben T als periodische Billardbahn? In den Eckpunkten von T muss G ein Teilstück einer Geraden oder, falls G in dem Reflexionspunkt gekrümmt ist, eine Tangente an den Reflexionspunkt besitzen, welche das für Billardbahnen per Definition nötige Reflexionsgesetz erfüllt. Eine Lösung ist der Schnittpunkt der Geraden durch die Eckpunkte des Polygons T , welche so liegen, dass das Reflexionsgesetz für die Innenwinkel von T erfüllt ist. Somit entsteht ein Polygon S , welches T als periodische Billardbahn hat. Abbildung 44 veranschaulicht dies.

Für T mit n Ecken hat T auch n Innenwinkel, welche wir als $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ bezeichnen. Für einen allgemeinen Winkel α_k liegt α_k zwischen α_{k-1} und α_{k+1} . Für den Winkel β_k zwischen der Gerade im Punkt T_k mit Winkel α_k und einer Seite von T gilt:

$$\beta_k = \frac{\pi - \alpha_k}{2}$$

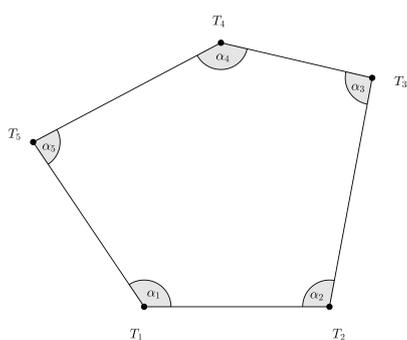
Das Polygon S hat die Innenwinkel $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$. Es ergibt sich folgendes Gleichungssystem, welches Gleichungssystem W genannt wird:

$$\pi - \beta_1 - \beta_n = \gamma_1 \quad (1)$$

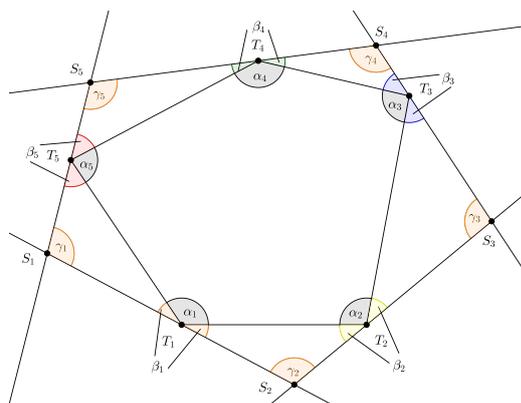
$$\pi - \beta_2 - \beta_1 = \gamma_2 \quad (2)$$

$$\pi - \vdots - \vdots = \vdots \quad (\vdots)$$

$$\pi - \beta_n - \beta_{n-1} = \gamma_n \quad (n)$$



(a) Polygon T



(b) Polygon S , definiert durch Polygon T

Abbildung 44

Dies sind n Teilgleichungen. β_k kommt nur in der Gleichung (k) und (k+1) vor. S ist ein Polygon mit n Seiten und daher ist die gesamte Innenwinkelsumme äquivalent zu $\pi \cdot (n - 2)$. Daher gilt:

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_n = \pi \cdot (n - 2)$$

Setzt man dazu das Äquivalent zu γ_k des Gleichungssystem W ein, erhält man:

$$\begin{aligned} (\pi - \beta_1 - \beta_n) + (\pi - \beta_2 - \beta_1) + \dots + (\pi - \beta_n - \beta_{n-1}) &= \pi \cdot (n - 2) \\ \Leftrightarrow n \cdot \pi - 2 \cdot (\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n) &= \pi \cdot (n - 2) \\ \Leftrightarrow 2 \cdot (\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n) &= 2 \cdot \pi \\ \Leftrightarrow \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n &= \pi \end{aligned}$$

Betrachten wir nun diese Resultate mit n als gerader Zahl und addieren vom Gleichungssystem W alle Gleichungen mit gerader und alle Gleichungen mit ungerader Nummer. Man erhält:

$$\begin{aligned} \frac{n}{2} \cdot \pi - (\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n) &= \gamma_1 + \gamma_3 + \dots + \gamma_{n-1} \\ \frac{n}{2} \cdot \pi - (\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n) &= \gamma_2 + \gamma_4 + \dots + \gamma_n \end{aligned}$$

Daraus folgt, da $\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n = \pi$:

$$\left(\frac{n}{2} - 1\right) \cdot \pi = \gamma_1 + \gamma_3 + \dots + \gamma_{n-1} \quad (7)$$

$$\left(\frac{n}{2} - 1\right) \cdot \pi = \gamma_2 + \gamma_4 + \dots + \gamma_n \quad (8)$$

Es gilt: $\pi > \gamma_k$.

Satz 7. *Ist ein konvexes Polygon mit gerader Seitenzahl n mit den Ecken P_1, P_2, \dots, P_n , wobei P_k mit den Ecken P_{k-1} und P_{k+1} verbunden ist, in einen Kreis einbeschrieben, gilt für die Innenwinkel ($\gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_n$ und γ_k gehört zu der Ecke P_k) Gleichung (2) und (3). (Abbildung 45)*

Beweis. Da alle Eckpunkte auf einem Kreis liegen, kann kein Innenwinkel γ_k grösser gleich π sein.

Betrachten wir den Mittelpunkt M des Kreises und das Viereck $\square MP_1P_2P_3$. Wegen des Peripheriewinkelsatzes gilt: Aussenwinkel von $\angle P_3MP_1$ also $2\pi - \angle P_3MP_1 = 2 \cdot \angle P_1P_2P_3$. Das gleiche gilt für das Viereck $MP_3P_4P_5$ und so weiter bis zu dem Viereck $MP_{n-1}P_nP_1$. Somit sind es $\frac{n}{2}$ Teilgleichungen, die als Summe folgendes ergeben:

$$\begin{aligned}
(2\pi - \angle P_3MP_1) + (2\pi - \angle P_5MP_3) + \dots + (2\pi - \angle P_1MP_{n-1}) &= \\
2 \cdot \angle P_1P_2P_3 + 2 \cdot \angle P_3P_4P_5 + \dots + 2 \cdot \angle P_{n-1}P_nP_1 &= \\
\Leftrightarrow \frac{n}{2} \cdot 2\pi - (\angle P_3MP_1 + \angle P_5MP_3 + \dots + \angle P_1MP_{n-1}) &= \\
2 \cdot (\angle P_1P_2P_3 + \angle P_3P_4P_5 + \dots + \angle P_{n-1}P_nP_1) &
\end{aligned}$$

Dazu kommt, dass $\angle P_3MP_1 + \angle P_5MP_3 + \dots + \angle P_1MP_{n-1} = 2\pi$, da dies einen vollen Kreis beschreibt und $\angle P_1P_2P_3 + \angle P_3P_4P_5 + \dots + \angle P_{n-1}P_nP_1 = \gamma_2 + \gamma_4 + \dots + \gamma_n$. Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
\frac{n}{2} \cdot 2\pi - (2\pi) &= 2 \cdot (\gamma_2 + \gamma_4 + \dots + \gamma_n) \\
\Leftrightarrow \left(\frac{n}{2} - 1\right) \cdot 2 \cdot \pi &= 2 \cdot (\gamma_2 + \gamma_4 + \dots + \gamma_n) \\
\Leftrightarrow \left(\frac{n}{2} - 1\right) \cdot \pi &= \gamma_2 + \gamma_4 + \dots + \gamma_n
\end{aligned}$$

Die gleiche Argumentationskette wird auch an $\gamma_1 + \gamma_3 + \dots + \gamma_{n-1}$ angewendet, um das gesuchte Resultat zu erhalten. \square

Betrachten wir nun das Gleichungssystem W mit ungeradem n . Nun addieren wir die Gleichungen mit ungerader Nummer und die Gleichungen mit gerader Nummer. Es sind $\frac{n+1}{2}$ Teilgleichungen mit ungerader Nummer und $\frac{n-1}{2}$ Teilgleichungen mit gerader Nummer. Man erhalt:

$$\begin{aligned}
\frac{n+1}{2} \cdot \pi - (\beta_n + \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_{n-1} + \beta_n) &= \gamma_1 + \gamma_3 + \dots + \gamma_n \\
\frac{n-1}{2} \cdot \pi - (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \dots + \beta_{n-1}) &= \gamma_2 + \gamma_4 + \dots + \gamma_{n-1}
\end{aligned}$$

Daraus folgt, da $\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n = \pi$:

$$\frac{n-1}{2} \cdot \pi - \beta_n = \gamma_1 + \gamma_3 + \dots + \gamma_n \quad (9)$$

$$\frac{n-3}{2} \cdot \pi + \beta_n = \gamma_2 + \gamma_4 + \dots + \gamma_{n-1} \quad (10)$$

Es gilt: $\pi > \gamma_k$.

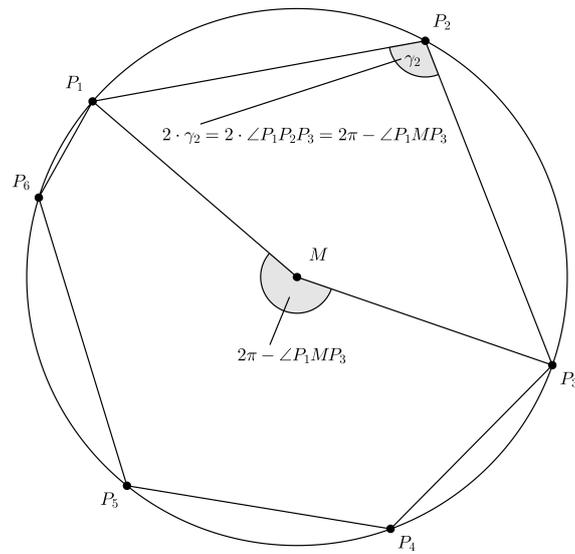


Abbildung 45

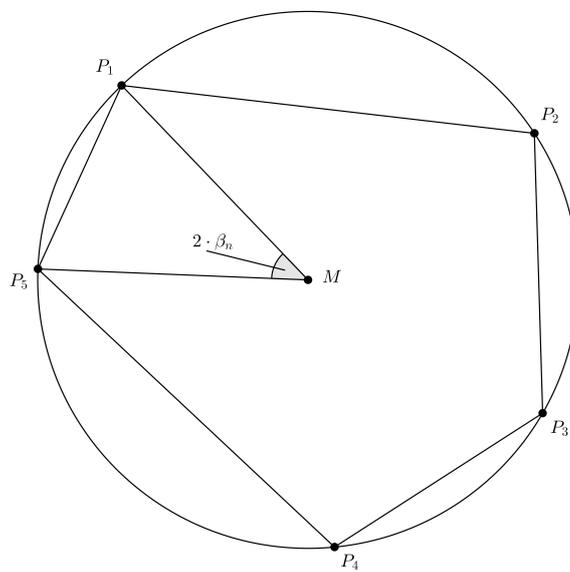


Abbildung 46

Satz 8. *Ist ein konvexes Polygon mit ungerader Seitenzahl n mit den Ecken P_1, P_2, \dots, P_n , wobei P_k mit den Ecken P_{k-1} und P_{k+1} verbunden ist, in einen Kreis mit Mittelpunkt M einbeschrieben, gilt für die Innenwinkel $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$ und γ_k gehört zu der Ecke P_k) Gleichung (4) und (5).*

Beweis. Da alle Eckpunkte auf einem Kreis liegen, kann kein Innenwinkel γ_k grösser gleich π sein. Sei $2 \cdot \beta_n$ der Winkel P_1MP_n . Betrachten wir das Viereck $MP_1P_2P_3$. Betrachten wir zunächst die Winkel mit gerader Nummer. Wegen des Peripheriewinkelsatzes gilt: Aussenwinkel von $\angle P_3MP_1$ also $2\pi - \angle P_3MP_1 = 2 \cdot \angle P_1P_2P_3$. Das gleiche gilt für das Viereck $MP_3P_4P_5$ und so weiter bis zu dem Viereck $MP_{n-2}P_{n-1}P_n$. Also summieren sich die $\frac{n-1}{2}$ Winkel $(\gamma_2 + \gamma_4 + \dots + \gamma_{n-1})$ zu:

$$\begin{aligned} \frac{2\pi - \angle P_3MP_1}{2} + \frac{2\pi - \angle P_5MP_3}{2} + \dots + \frac{2\pi - \angle P_nMP_{n-2}}{2} &= \\ & \gamma_2 + \gamma_4 + \dots + \gamma_{n-1} \\ \Leftrightarrow \frac{\frac{(n-1)}{2} \cdot 2\pi - (P_3MP_1 + P_5MP_3 + \dots + P_nMP_{n-2})}{2} &= \\ & \gamma_2 + \gamma_4 + \dots + \gamma_{n-1} \end{aligned}$$

Und da $P_3MP_1 + P_5MP_3 + \dots + P_nMP_{n-2} = 2\pi - 2 \cdot \beta_n$ (Abbildung 46) gilt:

$$\begin{aligned} \frac{(n-1) \cdot \pi - (2\pi - 2 \cdot \beta_n)}{2} &= \gamma_2 + \gamma_4 + \dots + \gamma_{n-1} \\ \frac{(n-3) \cdot \pi + 2 \cdot \beta_n}{2} &= \gamma_2 + \gamma_4 + \dots + \gamma_{n-1} \\ \frac{n-3}{2} \cdot \pi + \beta_n &= \gamma_2 + \gamma_4 + \dots + \gamma_{n-1} \end{aligned}$$

Ähnlich ist es bei der Summe der Winkel mit ungerader Nummer. Nur sind es $\frac{n+1}{2}$ Winkel und die Summe der Winkel $P_nMP_2 + P_2MP_4 + \dots + P_{n-1}MP_1 = 2\pi + 2 \cdot \beta_n$. Damit ergibt sich die gesuchte Relation.

$$\frac{n-1}{2} \cdot \pi - \beta_n = \gamma_1 + \gamma_3 + \dots + \gamma_n$$

□

Vermutung 1. *Jedes Sehnenvieleck mit Seitenzahl $n \geq 4$ hat eine periodische Billardbahn mit Periodenzahl n .*

Anmerkung. Damit ist eine notwendige Bedingung für die Existenz einer periodischen Billardbahn mit Periodenzahl n innerhalb eines n -gons für gerades und ungerades n hergeleitet. Es gelang nicht zu zeigen, dass für die Innenwinkel jedes Sehnenvielecks das Gleichungssystem W auf Lösungen führt, welche im Definitionsbereich liegen.

3.3 Kreis

Sei G ein Kreis mit Mittelpunkt M .

Satz 9. *Eine Billardbahn im Kreis mit Startpunkt $S \in \partial G$ Abschusswinkel $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ist genau dann periodisch, falls für $n, m \in \mathbb{N}_{>0}$ die folgende Gleichung lösbar ist. (Abbildung 47)*

$$2 \cdot \alpha \cdot n = m \cdot \pi$$

Beweis. Die Billardkugel bewegt sich fort und trifft auf den Rand und wird reflektiert im Punkt P_1 . Zwei Seiten des Dreiecks $\triangle SMP_1$ sind Radien des Kreises. Daher ist $\triangle SMP_1$ gleichschenkelig. Es folgt, dass der Winkel zwischen der Tangente zum Startpunkt und der Billardbahn gleich ist, wie der kleinere Winkel zwischen P_1 und der Billardbahn. Ebenso ist der Winkel $\angle P_1SM = \angle MP_1S = \frac{\pi}{2} - \alpha$. Daraus folgt: $\angle SMP_1 = \pi - (\frac{\pi}{2} - \alpha) - (\frac{\pi}{2} - \alpha) = 2\alpha$. Die Billardkugel bewegt sich weiter fort und trifft auf den Rand und wird reflektiert in Punkt P_2 . Das Dreieck $\triangle P_1MP_2$ ist kongruent zu dem Dreieck $\triangle SMP_1$. Dieser Prozess setzt sich fort. Damit sind zwei aufeinanderfolgende Reflexionspunkte immer um den gleichen Winkel zum Mittelpunkt gedreht. Füllen diese Drehungen jemals einen vollen Kreis, also 2π , ist die Bahn periodisch, da dann der gleiche Punkt wie der Startpunkt erreicht wurde und der Winkel zwischen Bahn und Tangente an den Reflexionspunkt auch gleich ist. Deshalb ist bei einer periodischen Billardbahn im Kreis ein Vielfaches des Winkels $\angle SMP_1 = 2 \cdot \alpha$ ein Vielfaches eines vollen Winkels, also 2π . Die gesuchte Relation ergibt sich. \square

Diese Aussage ist äquivalent zu: Eine Billardbahn im Kreis ist periodisch, falls der Abschusswinkel ein Produkt aus π und einem positiven Element von \mathbb{Q} ist. Abbildung 48 zeigt eine periodische Billardbahn im Kreis.

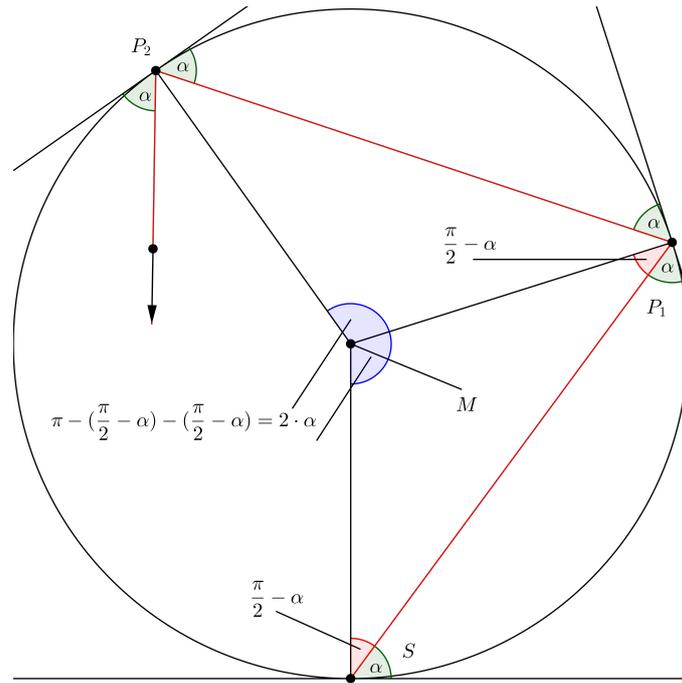
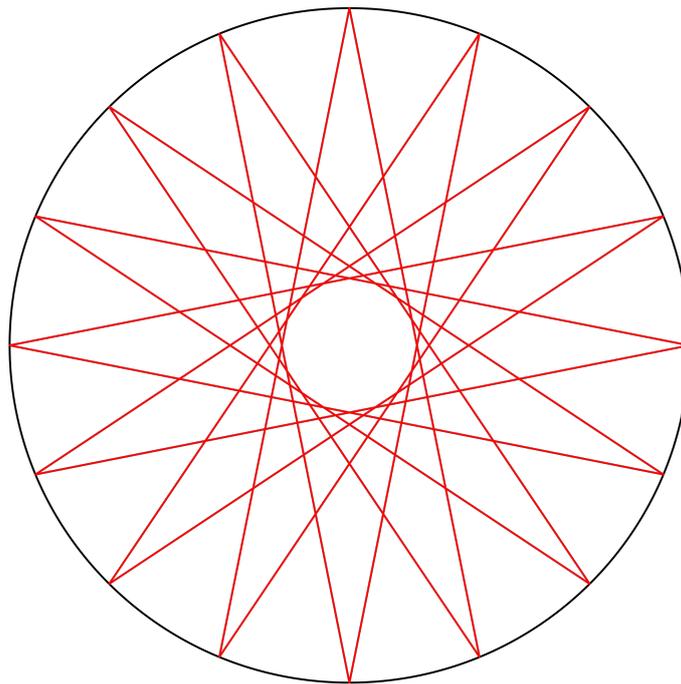


Abbildung 47

Abbildung 48: Periodische Billardbahn mit $\alpha = \frac{7}{16} \cdot \pi$

4 Periodische Billardbahnen innerhalb des Würfels

W sei ein Würfel. ∂W ist der Rand des Würfels. Alle Seitenlängen des Würfels seien 1. Definieren wir die Fortbewegung einer Billardkugel innerhalb eines Würfels. Die Kugel bewegt sich solange geradlinig fort, bis sie auf ∂W trifft und dort nach folgendem Gesetz reflektiert wird: (1) Einfallswinkel = Ausfallswinkel (2) Einfallsebene = Ausfallsebene. Nach der Reflexion bewegt sich die Billardkugel wieder geradlinig fort, bis sie erneut ∂W trifft. Der Startpunkt sei $\in \partial W$. Trifft die Billardkugel auf eine Ecke oder eine Kante des Würfels ist die Bewegung nicht weiter definiert und endet genau dort.

Das Koordinatensystem A_w sei ein 3-dimensionales Koordinatensystem und sei so platziert, dass eine der Ecken des Würfels die Koordinaten $(0, 0, 0)$ hat und eine Seite des Würfels Teilmenge des positiven Teiles der X -Achse, eine Seite des Würfels Teilmenge des positiven Teiles der Y -Achse und eine Seite des Würfels Teilmenge des positiven Teiles der Z -Achse ist. Der Abstand des Startpunktes zu den Kanten der Fläche, auf der der Startpunkt sich befindet, ist massgebend für die Form der Billardbahn und nicht die Position der Fläche. Daher ist es genügend als Startpunkt S zwei Zahlen $x, y \in [0, 1]$ festzulegen. Die Ebene E sei die Ebene zu der die Punkte $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ und $(1, 1, 0)$ gehören. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit gilt: Der Startpunkt befindet sich auf der Ebene E und hat die Koordinaten $(x, y, 0)$. \vec{v} sei der Abschussvektor. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit gilt: $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$: (Abbildung 49)

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

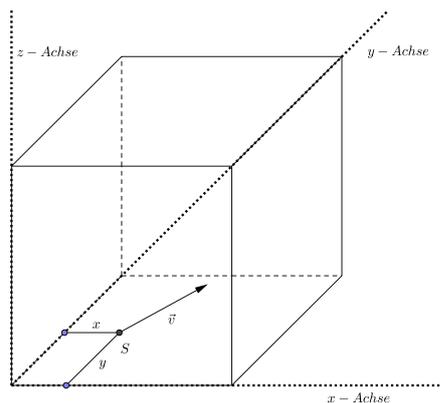


Abbildung 49: Billardbahn im Würfel mit Startpunkt

Definition 10. (Billardposition r'_w und r_w ; Billardbahn b_w) r'_w ist die Position der Billardkugel zu Startpunkt $S = (x, y, 0)$ mit $x, y \in [0, 1]$ und Abschussvektor $\vec{v} = [v_1; v_2; v_3]$ mit $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. r_w ist das Paar aus r'_w und dem Bewegungsvektor der Billardkugel innerhalb des Würfels zu Zeitpunkt t $w_w(t)$. b_w sei die Billardbahn innerhalb des Würfels.

$$\begin{aligned} r'_w : [0, 1] \times [0, 1] \times \mathbb{R}_{\geq 0}^3 \times \mathbb{R} &\rightarrow W \\ (S, \vec{v}, t) &\rightarrow r'_w(S, \vec{v}, t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_w : [0, 1] \times [0, 1] \times \mathbb{R}_{\geq 0}^3 \times \mathbb{R} &\rightarrow W \times \mathbb{R}^3 \\ (S, \vec{v}, t) &\rightarrow r_w(S, \vec{v}, t) \\ (S, \vec{v}, t) &\rightarrow (r'_w(S, \vec{v}, t), w_w(t)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_w : [0, 1] \times [0, 1] \times \mathbb{R}_{\geq 0}^3 &\rightarrow W \\ (S, \vec{v}) &\rightarrow b_w(S, \vec{v}) \\ b_w(S, \vec{v}) &:= \{r'_w(S, \vec{v}, t) | t \geq 0\} \end{aligned}$$

Definition 11. (Periodische Billardbahn innerhalb des Würfels) Eine Billardbahn b_w in W heisst *periodisch*, falls die unten stehende Gleichung mit der Bedingung $t_1 \in \mathbb{R}_{>0}$ lösbar ist.

$$r_w(S, \vec{v}, 0) = (S, \vec{v}) = r_w(S, \vec{v}, t_1)$$

Wie das Quadrat die Ebene parkettiert, so füllt der Würfel den 3-dimensionalen Raum. Als Billardbahn im Raum b_{wr} des Würfels wird eine andere Darstellung der Billardbahn definiert. Sie entsteht, wenn man vom Startpunkt aus bei jeder einzelnen Reflexion anstatt die Billardkugel zu reflektieren mit dem Würfel an der Fläche der Reflexion eine Ebenenspiegelung durchführt. Somit ist die Billardbahn im Raum b_{wr} ein Strahl von Punkt S aus mit dem Abschussvektor \vec{v} . Der Würfelraum der Billardbahn im Raum ist die Menge der gespiegelten Würfel ohne b_{wr} .

Definition 12. (Billardposition r'_{wr} und Billardbahn im Raum b_{wr}) r'_{wr} ist die Position der Billardkugel im Raum. b_{wr} ist die Billardbahn im Raum. Der Würfelraum einer Billardbahn im Raum b_{wr} ist definiert, als die gespiegelten Würfel ohne die Billardbahn b_{wr} .

$$r'_{wr} : [0, 1] \times [0, 1] \times \mathbb{R}_{\geq 0}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(S, \vec{v}, t) \rightarrow r'_{wr}(S, \vec{v}, t)$$

$$b_{wr} : [0, 1] \times [0, 1] \times \mathbb{R}_{\geq 0}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(S, \vec{v}) \rightarrow b_{wr}(S, \vec{v})$$

$$b_{wr}(S, \vec{v}) := \{r'_{wr}(S, \vec{v}, t) | t \geq 0\}$$

Würfelraum(b_{wr}) := Menge der gespiegelten Würfel ohne b_{wr}

Anmerkung. Jeder Würfelraum ist Teilmenge der Füllung des Raumes durch den Würfel.

Definition 13. (Menge K^p eines Würfelraumes) P_i sei ein Schnittpunkt zwischen b_{wr} und dem Würfelraumes von b_{wr} , wobei die Fläche auf der sich P_i befindet parallel zur Startfläche sei. S sei der Startpunkt von b_{wr} . S hat die Koordinaten $(x, y, 0)$ und liegt auf der Ebene E .

P_i liege auf der Ebene T . T ist parallel zu E . k_1 sei die Kante von T , welche parallel zur Y-Achse ist und eine kleinere X-Koordinate hat. k_2 sei die Kante von T , welche parallel zur X-Achse ist und eine kleinere Y-Koordinate hat. P_1 sei der Punkt auf k_1 mit kleinstem Abstand zu P_i . P_2 sei der Punkt auf k_2 mit kleinstem Abstand zu P_i

P_i ist ein Element der Menge K^p , falls gilt: (Abbildung 50)

- (1) $x = \overline{P_i P_1}$
- (2) $y = \overline{P_i P_2}$

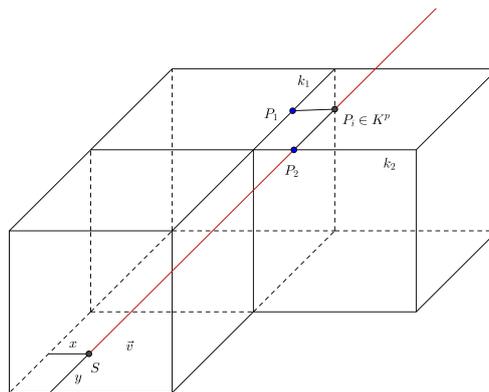


Abbildung 50: Menge K^p

Lemma 5. *Ist $K^p \neq \{\}$, so hat die Menge K^p unendlich viele Elemente.*

Beweis. Zu t_1 sei die Billardkugel im Raum Element der Menge K^p . Aus den Eigenschaften der Menge K^p folgt: Die Bahn der Billardkugel von $t = 0$ bis t_1 ist gleich wie die Bahn der Billardkugel von t_1 bis $2 \cdot t_1$. Somit ist die Billardkugel zu $2 \cdot t_1$ Element der Menge K^p . Nun können wir $t_1 = 2 \cdot t_1$ setzen und die gleiche Argumentationskette nochmals durchführen und erhalten ein weiteres Element der Menge K^p . Dies geht unendlich oft. \square

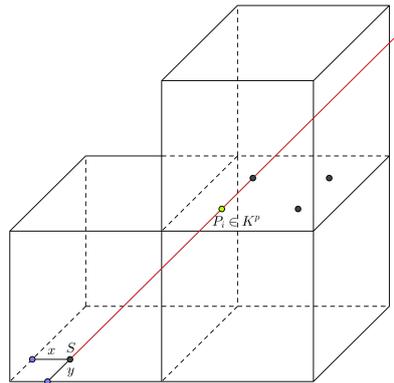
Lemma 6. *Ist b_{wr} zugehörig zu einer periodischen Billardbahn, so ist die Menge K^p von b_{wr} nicht leer.*

Beweis. Nach der Definition der periodischen Billardbahn wissen wir, dass für die Billardbahn zu einem Zeitpunkt, nennen wir ihn t_1 , gilt: $r_w(S, \vec{v}, t_1) = (S, \vec{v})$. Es folgt, dass auch zu $2 \cdot t_1$ gilt: $r_w(S, \vec{v}, 2 \cdot t_1) = (S, \vec{v})$. Des Weiteren gilt: $\{r'_w(S, \vec{v}, t_i) | t_i \in [0, t_1]\} = \{r'_w(S, \vec{v}, t_i) | t_i \in [t_1, 2 \cdot t_1]\}$. Sprich: Die Billardkugel legt innerhalb des Würfels von 0 bis t_1 genau die gleiche Bahn zurück wie von t_1 bis $2 \cdot t_1$. Die Billardkugel im Raum sei zu t_1 der Punkt P_1 . Nun wird gezeigt, $P_1 \in K^p$. Das Hauptargument des Beweises ist: Die Teilstrecken zwischen den Schnittpunkten des Würfelraums mit der Billardbahn im Raum von 0 bis t_1 sind gleich wie die Teilstrecken zwischen den Schnittpunkten des Würfelraums mit der Billardbahn im Raum von t_1 bis $2 \cdot t_1$. Wir beweisen folgende Teilaussagen:

- (1) P_1 befindet sich auf einer Fläche parallel zu der Startfläche: P_1 ist eine Spiegelung des Startpunktes im Würfelraum. Alle Spiegelungen des Startpunktes befinden sich auf Flächen parallel zur Startfläche. Somit gilt die Aussage.
- (2) P_1 hat die richtigen Teilabstände für die Menge K^p : Da zu t_1 die Billardkugel im Würfel sich auf dem Startpunkt befindet, muss die Billardkugel sich im Raum auf einer Spiegelung des Startpunktes auf einer zur Startseite parallelen Fläche befinden. Für Spiegelungen des Startpunktes kommen pro Fläche vier Punkte in Frage (Abbildung 51). Jedoch nur für einen dieser vier Punkte gilt, dass die Strecke vom Startpunkt zum ersten Schnittpunkt der Billardbahn im Raum mit dem Würfelraum gleich ist wie von P_1 zum nächsten Schnittpunkt der Billardbahn im Raum mit dem Würfelraum. Dieser Punkt ist Element der Menge K^p .

\square

Definition 14. (Menge L einer Billardbahn im Würfel) Der Würfelraum einer Billardbahn ist durch Ebenenspiegelungen entstanden. $K_i \in K^p$. $K_i \in b_{wr}$. $K_i \in$ eines gespiegelten Würfels von dem Würfelraum von b_{wr} . Nun wird der Prozess der Entstehung des Würfelraumes umgedreht. Die Würfel werden mit Ebenenspiegelungen auf den *Urwürfel* zurück gespiegelt. So auch der Würfel, von welchem K_i ein Element ist. Alle Elemente des Urwürfels auf denen sich durch diesen Prozess ein gespiegeltes Element der Menge K^p befindet, sind $\in L$.

Abbildung 51: Kandidaten für P_1

Anmerkung. Die Menge L hat jedenfalls eine endliche Anzahl Elemente, da die Elemente der Menge L eine gewisse Abstandseigenschaft erfüllen müssen und zusätzlich nur auf zwei verschiedenen Flächen sein können. Somit kommen für die Elemente der Menge L 8 Punkte in Frage.

Satz 10. Eine Billardbahn b_w innerhalb des Würfels ist genau dann periodisch, wenn die Menge K^p der zugehörigen Billardbahn im Raum nicht leer ist.

Beweis. Zeigen wir folgende Aussagen:

- (1) Ist eine Billardbahn periodisch, ist die Menge K^p der zugehörigen Billardbahn im Würfelraum nicht leer: Dies wurde in Lemma 6 bewiesen.
- (2) Ist die Menge K^p nicht leer, ist die zugehörige Billardbahn im Würfel periodisch: Nach Lemma 5 hat demnach die Menge K^p unendlich viele Elemente. Daraus folgt: Zu unendlich vielen verschiedenen Zeitpunkten ist die Billardbahn im Würfel Element der Menge L . Da die Menge L jedenfalls eine endliche Anzahl Elemente hat, gilt: Es existieren zwei ungleiche Zeitpunkte $t_1, t_2 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, für die Position und Bewegungsvektor der Billardkugel gleich sind. Daraus folgt, dass die Billardbahn periodisch ist.

□

Betrachten wir ein Koordinatensystem B_w , welches eine parallele Verschiebung des Koordinatensystems A_w ist. Der Startpunkt S habe in dem Koordinatensystem B_w die Koordinaten $(0, 0, 0)$. Im Koordinatensystem B_w : Alle Elemente der Menge K^p haben Koordinaten (m, n, o) mit $m, n, o \in \mathbb{N}_0$ und $o \neq 0$. Es folgt: Wenn ein Element der Billardbahn b_{wr} im Koordinatensystem B_w ganzzahlige Koordinaten hat, dann ist b_w periodisch ist. Diese Aussage ist Korollar 7.

Korollar 7. *Eine Billardbahn innerhalb des Würfels ist genau dann periodisch, wenn für den Abschussvektor folgendes mit $m, n, o \in \mathbb{N}_0$ und $o \neq 0$, sowie $u \in \mathbb{R}_{>0}$ gilt:*

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = u \cdot \begin{bmatrix} m \\ n \\ o \end{bmatrix}$$

Abbildung 52 bis 55 zeigen periodische Billardbahnen innerhalb des Würfels.

Anmerkung. Projiziert man eine periodische Billardbahn im Würfel auf eines der Quadrate, aus welchem der Würfel besteht, so entsteht eine periodische Billardbahn im Quadrat.

Anmerkung. Abbildung 55 sieht ein wenig eigenartig aus. Dies liegt daran, dass zwei aufeinanderfolgende Streckenabschnitte in unserer Projektion auf der gleichen Gerade liegen.

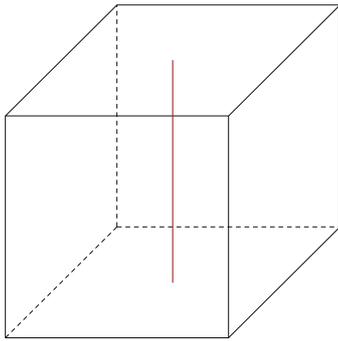


Abbildung 52: $S = (0.5, 0.5)$; $\vec{v} = [0; 0; 1]$

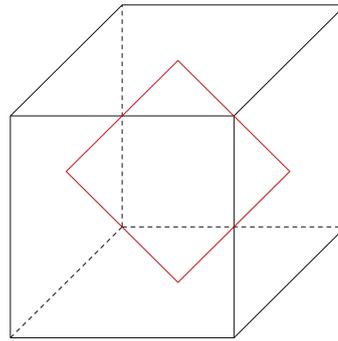


Abbildung 53: $S = (0.5, 0.5)$; $\vec{v} = [1; 0; 1]$

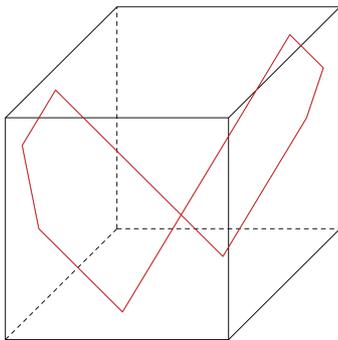


Abbildung 54: $S = (0.4, 0.25)$; $\vec{v} = [1; 1; 2]$

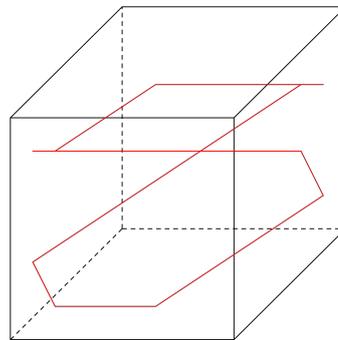


Abbildung 55: $S = (0.5, 0.3)$; $\vec{v} = [2; 2; 1]$

5 Billard auf platonischen Körpern P

5.1 Billard auf ∂P

P sei ein platonischer Körper. Die 5 platonischen Körper (Tetraeder, Würfel, Oktaeder, Ikosaeder und Dodekaeder) bestehen aus mehreren regelmässigen Dreiecken, Quadraten, oder regelmässigen Fünfecken. Die Seitenlänge aller Kanten der platonischen Körper sei 1. ∂P^* entspricht der Menge der Kanten des platonischen Körpers. Die Bewegung einer Billardbahn auf der Oberfläche eines platonischen Körpers, also auf ∂P , hat einen Startpunkt $S \in \partial P^*$ und einen Abschussvektor \vec{v} .

Die Billardkugel verläuft geradlinig in einem der Grundflächen des platonischen Körpers. Eine Kante a eines platonischen Körpers sei Teilmenge zweier kongruenter Polygone X und Y . X sei eine Teilmenge der Ebene E . Dreht man Y an Kante a , sodass $Y \subseteq E$ aber $Y \neq X$ erhält man Y' . Eine Billardkugel bewege sich geradlinig auf Fläche X und treffe Kante a in Punkt P . Die Billardkugel bewegt sich auf Y so fort, dass sich die Billardkugel geradlinig auf X und Y' , also auch auf der Ebene E , fortbewegt. Abbildung 56 veranschaulicht dies.

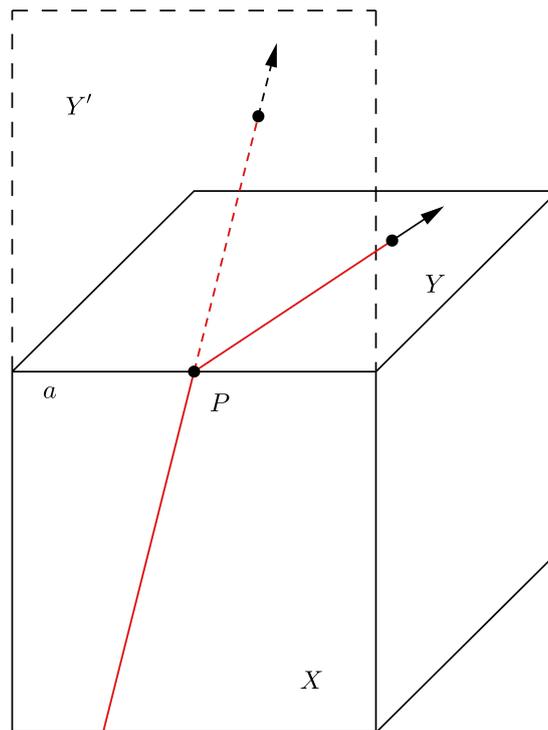


Abbildung 56: Verlauf Billardkugel

Faltet man eine Billardbahn im Netz b_n eines Polygones, welches eine Grundfläche eines platonischen Körpers ist, mit dem Netz an den Kanten des Netzes, welche von b_n geschnitten werden, so, dass der entstehende Körper \subset eines platonischen Körpers ist, so entsteht eine Billardbahn auf ∂P . Dies wird durch Abbildung 57 veranschaulicht. Die Billardbahn im Netz b_n wurde zu der Billardbahn auf der Oberfläche des platonischen Körpers b_p gefaltet. Jede Billardbahn auf ∂P ist eine Faltung einer Billardbahn im Netz b_n . Jede Billardbahn b_n eines regelmässigen Polygones gehört zu einer Billardbahn b in dem regelmässigen Polygon. Also gehört jede Billardbahn b_p auf ∂P zu einer Billardbahn im regelmässigen Polygon. Es gilt auch die Winkel- und Seitensymmetrie für b und daher auch für b_p . (siehe 2.1). Dies impliziert die Einschränkung des Startpunktes S auf $S \in [0, 1]$ und des Abschussvektors auf den Abschusswinkel $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Trifft die Billardkugel auf einen Eckpunkt des platonischen Körpers, ist die Bewegung nicht weiter definiert und die Bewegung endet genau dort.

Definition 15. (Billardposition r'_p und r_p und Billardbahn b_p auf Oberfläche eines platonischen Körpers P) Für einen platonischen Körper P , einen Startpunkt $S \in [0, 1]$ und einen Abschusswinkel $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$ und einen Zeitpunkt $t \in \mathbb{R}$ ist r'_p die Billardposition zu Zeitpunkt t , r_p das Paar aus r'_p und dem Bewegungsvektor $w_p(t)$ zu Zeitpunkt t und b_p die Billardbahn auf ∂P .

$$\begin{aligned} r'_p : [0, 1] \times [0, \frac{\pi}{2}] \times \mathbb{R} &\rightarrow \partial P \\ (S, \alpha, t) &\rightarrow r'_p(S, \alpha, t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_p : [0, 1] \times [0, \frac{\pi}{2}] \times \mathbb{R} &\rightarrow \partial P \times \mathbb{R}^2 \\ (S, \alpha, t) &\rightarrow r_p(S, \alpha, t) \\ (S, \alpha, t) &\rightarrow (r'_p(S, \alpha, t), w_p(t)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_p : [0, 1] \times [0, \frac{\pi}{2}] &\rightarrow \partial P \\ (S, \alpha) &\rightarrow b_p(S, \alpha) \\ b_p(S, \alpha) &:= \{r'_p(S, \alpha, t) | t \geq 0\} \end{aligned}$$

Anmerkung. Eine Billardbahn b_p auf ∂P heisst periodisch, falls zu einem Zeitpunkt $t_1 > 0$ gilt: $r_p(S, \alpha, 0) = r_p(S, \alpha, t_1)$.

Definition 16. (Menge L eines platonischen Körpers zu einer Menge K^P) Jede Billardbahn im Netz kann, wie in Abbildung 57 veranschaulicht, zu einer Billardbahn $\subseteq \partial P$ gefaltet werden. Dabei werden auch die Elemente der Menge K^P gefaltet. Alle Elemente von ∂P , welche gefaltete Elemente der Menge K^P sind, sind Elemente der Menge L .

Anmerkung. Es kommen pro Kante von P nur zwei Elemente für die Menge L in Frage, daher hat sie eine endliche Anzahl Elemente.

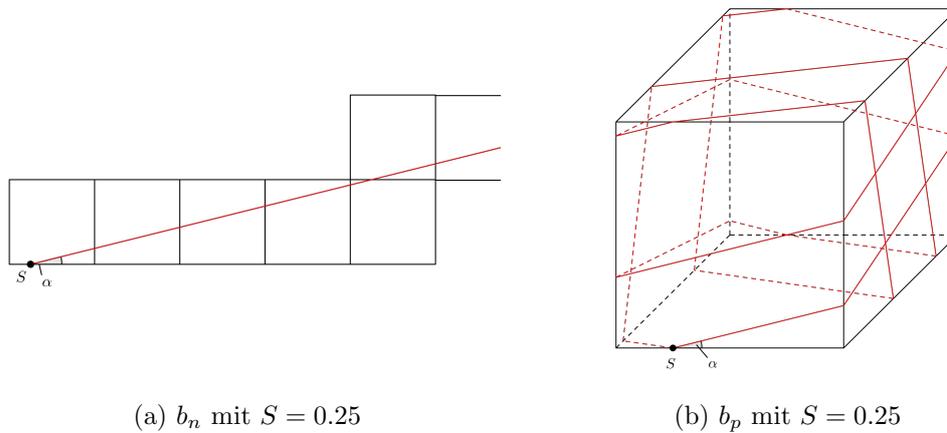
(a) b_n mit $S = 0.25$ (b) b_p mit $S = 0.25$

Abbildung 57

Satz 11. Eine Billardbahn auf dem platonischen Körper ist genau dann periodisch, falls die zugehörige Billardbahn im Polygon periodisch ist.

Beweis. Unterscheiden wir die Aussagen:

- (1) Aus b_p periodisch folgt b periodisch. *Beweis.* Es folgt: Die Menge K^p ist nicht leer. (Wird gleich bewiesen wie Lemma 2) Daraus folgt, dass b periodisch ist.
- (2) Aus b periodisch folgt b_p periodisch. *Beweis.* Unendlich viele Elemente der Menge K sind $\in b_n$. Daraus folgt, dass $r'_p(S, \alpha, t)$ zu unendlich vielen verschiedenen Zeitpunkten $t \in \mathbb{R}_{>0}$ Element der Menge L ist. Es folgt: Zu zwei ungleichen Zeitpunkten sind Position und Bewegungsvektor auf dem platonischen Körper gleich. Somit ist b_p periodisch.

□

Definition 17. (Periodenzahl einer periodischen Billardbahn auf ∂P) Ist eine Billardbahn b_p periodisch, besitzt sie eine Periodenzahl $p \in \mathbb{N}$. $t_1 \in \mathbb{R}_{>0}$ löse die Gleichung $r_p(S, \alpha, 0) = r_p(S, \alpha, t_1)$. Es existiere kein $t_n \in \mathbb{R}$ mit $t_n \in (0, t_1)$, welches die Gleichung löst. Die Periodenzahl p ist definiert als die Anzahl Kantenschnittpunkte während des Zeitintervalls $t \in (0, t_1]$.

5.2 Geodäten auf ∂P

Definition 18. (Geodäte auf ∂P) Eine Kurve auf ∂P heisst Geodäte, falls sie geradlinig ist und kein Eckpunkt \in der Geodäte ist. Dies impliziert, dass wenn eine Geodäte auf der Oberfläche eines platonischen Körpers aufgefaltet wird, dass die Geodäte, betrachtet in einem Koordinatensystem, als eine lineare Funktion beschrieben werden kann.

Anmerkung. Diese Definition ist inspiriert durch [4]. Ebenso ist dies keine klassische Definition einer Geodäte und verwendet nur elementare Begriffe.

Jede Billardbahn b_p auf ∂P ist durch diese Definition eine Geodäte. Eine Billardbahn b_p auf ∂P hat einen Abschusswinkel $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$, daher ist nicht jede Geodäte eine Billardbahn. Wegen der Winkel- und Seitensymmetrie ist jedoch jede Geodäte kongruent zu einer Billardbahn.

Definition 19. (geschlossene Geodäte auf ∂P) Eine Geodäte auf ∂P heisst *geschlossen*, falls eine zu der Geodäte kongruente Billardbahn b_p periodisch ist. Abbildung 57(b) zeigt eine geschlossene Geodäte.

Anmerkung. Jede periodische Billardbahn auf einem platonischen Körper ist somit eine geschlossene Geodäte.

Definition 20. (einfache Geodäte auf ∂P) Eine geschlossene Geodäte heisst *einfach*, falls für eine kongruente Billardbahn b_p folgendes gilt:

- (1) b_p ist periodisch. (geschlossene Geodäte)
- (2) $t_1 \in \mathbb{R}_{>0}$ löse die Gleichung $r_p(S, \alpha, 0) = r_p(S, \alpha, t_1)$. Es existiere kein $t_n \in \mathbb{R}$ mit $t_n \in (0, t_1)$, welches die Gleichung löst. $t_a, t_b \in (0, t_1)$, $t_a \neq t_b$. Es gilt: $r'_p(S, \alpha, t_a) \neq r'_p(S, \alpha, t_b)$.

Eine nicht geschlossene Geodäte heisst *einfach*, falls für eine kongruente Billardbahn b_p folgendes gilt:

- (1) Für $t_a, t_b \in \mathbb{R}_{>0}$ und $t_a \neq t_b$. Es gilt: $r'_p(S, \alpha, t_a) \neq r'_p(S, \alpha, t_b)$.

Vereinfacht gesagt, ist somit eine einfache Geodäte eine Geodäte, die sich nicht selbst überschneidet. So zeigt Abbildung 57(b) eine **nicht** einfach geschlossene Geodäte.

5.3 Klassifikation einfach geschlossener Geodäten auf ∂P

5.3.1 Tetraeder

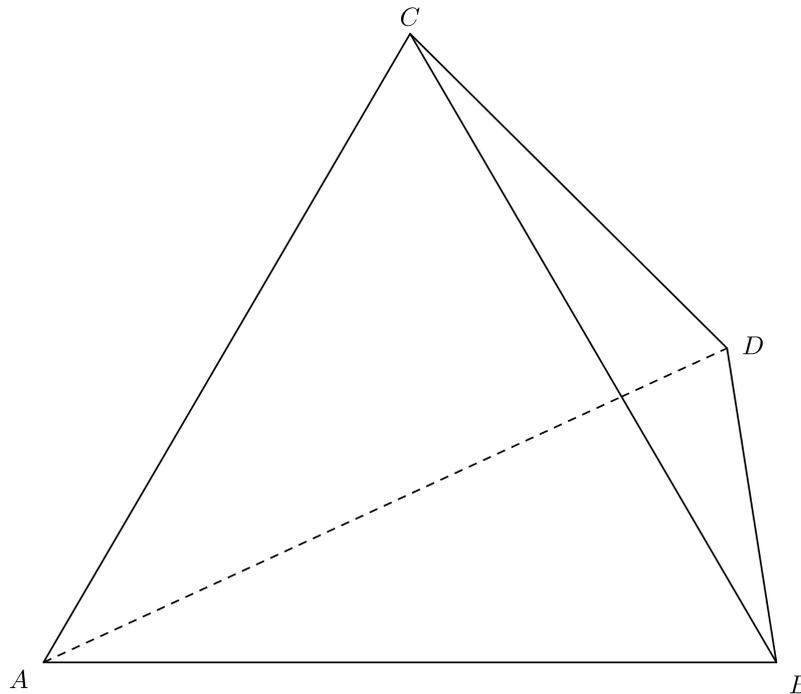
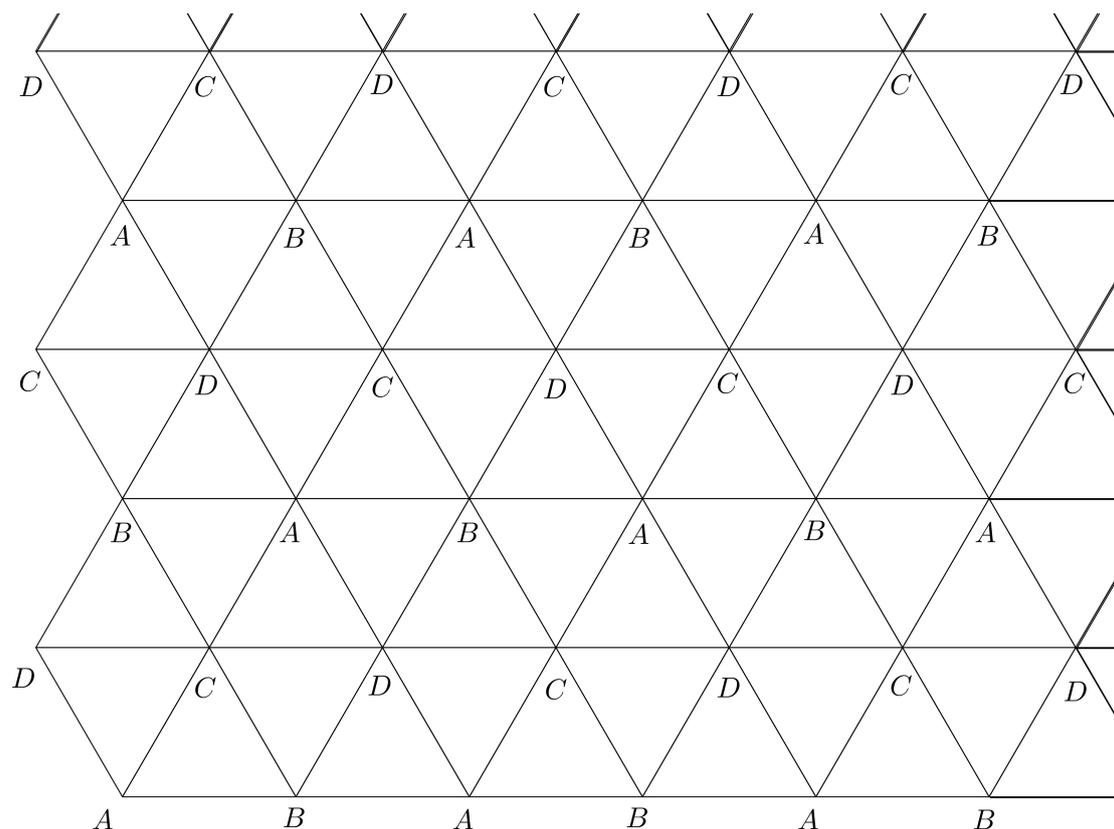


Abbildung 58: Tetraeder mit Eckenbeschriftung

Die Informationen wurden aus [2] Seite 267-268 entnommen und auf die Begriffe dieser Arbeit angepasst. P sei ein Tetraeder. Die Ecken des Tetraeder werde mit den Punkten A, B, C und D beschriftet (Abbildung 58). Jede Geodäte ist kongruent zu einer Billardbahn b_p . b_p habe den Startpunkt auf AB . Betrachten wir die Parkettierung des regelmässigen Dreieckes und beschriften die Eckpunkte der Parkettierung so, dass wenn man ein Netz der Parkettierung zu einem Tetraeder faltet, dass dann die gefalteten Ecken des Netzes gleich wie die Ecken des Tetraeders beschriftet sind. Da ein Tetraeder 4 Ecken hat, gibt es nur eine mögliche Beschriftung der Parkettierung. (Abbildung 59)

Satz 12. *Jede Billardbahn b_p auf dem Tetraeder ist eine einfachen Geodäte.*

Beweis. Zwei gleich beschriftete Dreiecke der Parkettierung des regelmässigen Dreieckes (Abbildung 59) sind entweder parallel oder parallel zu dem um π gedrehten Dreieck. Die Billardbahn im Netz b_n ist ein Strahl. Es folgt, dass b_n jedes gleich beschriftete Dreieck parallel durchläuft. Dies impliziert bei der Faltung von b_n zu b_p , dass die Stücke von b_p , die

Abbildung 59: Menge N des regelmässigen Dreiecks mit beschrifteten Ecken

sich auf einer Grundfläche des Tetraeders befinden, parallel zu einander sind. Daraus folgt, dass wenn die Billardposition r'_p zu zwei verschiedenen Zeitpunkten $t_a, t_b \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ gleich ist, dass dann auch die Billardposition r_p gleich sein muss. Daher kann die Billardposition r'_p nur zu zwei verschiedenen Zeitpunkten $t_a, t_b \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ gleich sein, falls b_p periodisch ist. Dies ist die Definition einer einfachen Geodäte. \square

Satz 12 enthält **Korollar 8**.

Korollar 8. *Jede geschlossene Geodäte auf der Oberfläche des Tetraeders ist einfach.*

Nach **Satz 11** ist eine Billardbahn b_p auf dem Tetraeder genau dann periodisch, falls der Abschusswinkel α ein Produkt von $\sqrt{3}$ und einer rationalen Zahl ist. Alle geschlossene Geodäten sind per Definition kongruent zu einer periodischen Billardbahn b_p . Dies klassifiziert alle einfach geschlossenen Geodäten auf dem Tetraeder. Dies ist ein durchaus erstaunliches Resultat. Es existieren einfach geschlossene Geodäten auf dem Tetraeder, deren Länge grösser ist als jede beliebige Zahl $k \in \mathbb{R}$.

Abbildung 60 bis 62 veranschaulichen einfache geschlossene Geodäten auf dem Tetraeder.

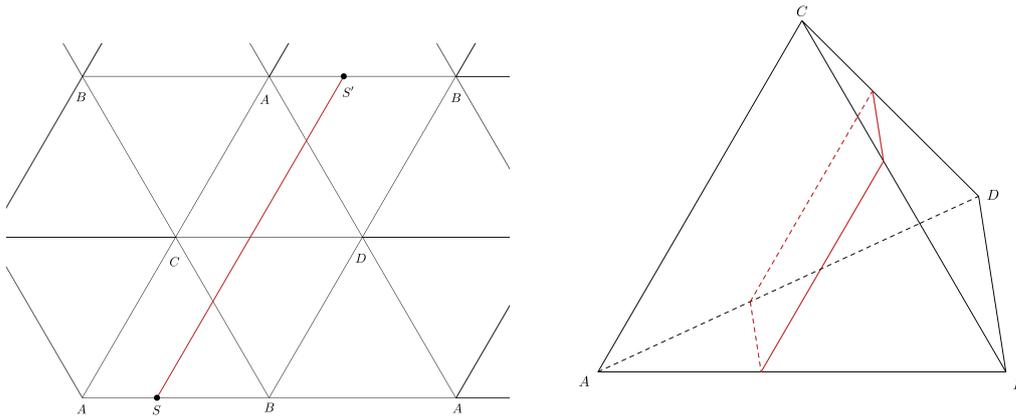


Abbildung 60: Einfache geschlossene Geodäten kongruent zu b_p mit $S = 0.4$ und $\alpha = \frac{\pi}{3}$

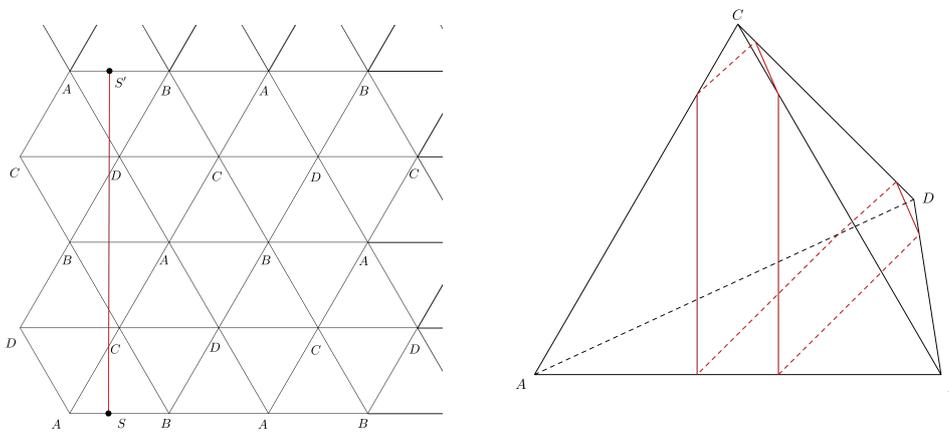


Abbildung 61: Einfache geschlossene Geodäten kongruent zu b_p mit $S = 0.4$ und $\alpha = \frac{\pi}{2}$

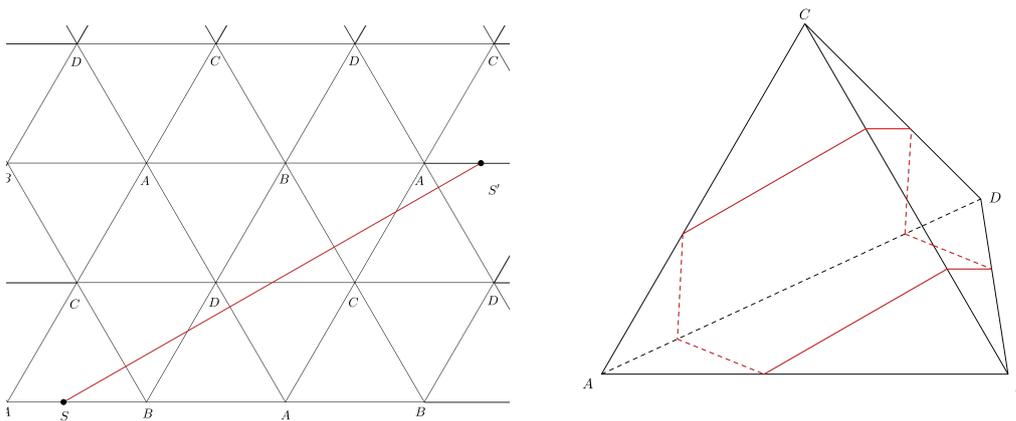


Abbildung 62: Einfache geschlossene Geodäten kongruent zu b_p mit $S = 0.4$ und $\alpha = \frac{\pi}{6}$

5.3.2 Würfel

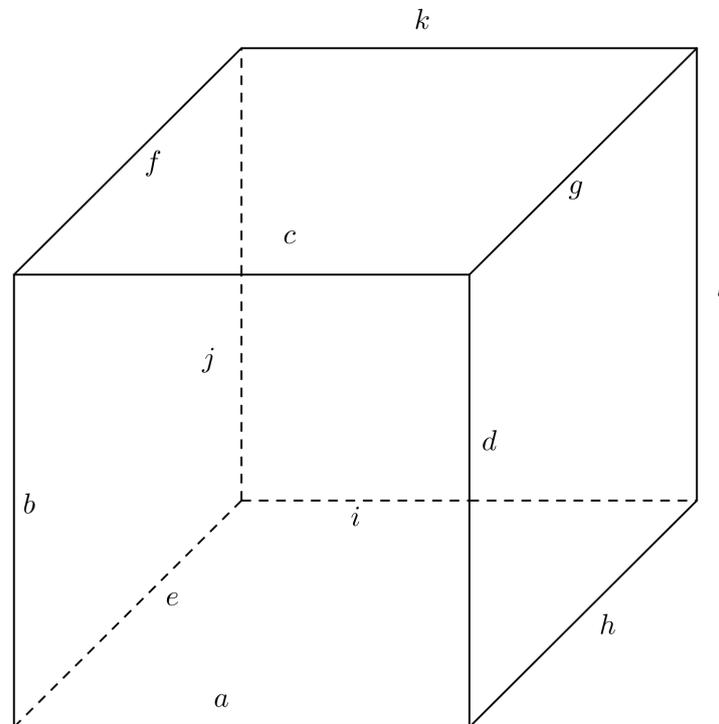


Abbildung 63: Würfel mit Kantenbeschriftung

P sei ein Würfel. **Lemma 7** und **Lemma 8** wurden aus [2] Seite 271 entnommen. Die Kanten des Würfels werden mit $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k$ und l wie in Abbildung 63 beschriftet.

Lemma 7. *Die Menge der Teilstücke einer Billardbahn b_p , die auf einer Fläche des Würfels liegen, sind entweder parallel zueinander oder stehen senkrecht zueinander.*

Beweis. In dem Verlauf einer Billardbahn b_n im Netz erscheint jede Fläche in maximal 4 verschiedenen Positionen, die sich nur durch Rotationen um $\frac{\pi}{2}$ unterscheiden. Sind zwei Flächen gleich beschrieben, aber unterscheiden sich um eine Drehung um π sind die Teilstücke der Billardbahn auf dem Würfel parallel zueinander. Sind zwei Flächen gleich beschrieben aber unterscheiden sich um eine Drehung um $\frac{\pi}{2}$ oder $\frac{3\pi}{2}$, stehen die Teilstücke der Billardbahn auf dem Würfel senkrecht zueinander. Somit sind die Teilstücke einer Billardbahn b_p , die auf einer Fläche des Würfels liegen, entweder parallel zueinander oder stehen senkrecht zueinander. \square

Lemma 8. *Zwei Billardbahnen b_p (b_p mit Startpunkt S) und b_p^* (b_p^* mit Startpunkt S') haben den gleichen Abschusswinkel und $S, S' \in a$. Falls ein Zeitpunkt $t \in \mathbb{R}_{>0}$ existiert, bei dem $r_p'(S, \alpha, t)$ und $r_p^*(S', \alpha, t)$ nicht Element der gleichen Kante sind, so haben b_p und b_p^* einen Schnittpunkt.*

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit betrachten wir den Fall, dass $r_p'(S, \alpha, 0)$ und $r_p^*(S', \alpha, 0) \in a$ und zu t_1 $r_p'(S, \alpha, t_1) \in c$ und $r_p^*(S', \alpha, t_1) \in g$. (Abbildung 64)

In der Fläche, die durch die Kanten g, c, f und k begrenzt wird, stehen die beiden Billardbahnen nicht parallel zueinander, folglich stehen sie nach **Lemma 7** senkrecht zueinander. Daraus folgt, dass es im Netz einen Schnittpunkt gibt, der sich entweder auf der Fläche, die durch die Kanten g, c, f und k begrenzt wird, befindet oder auf einem der angrenzenden Flächen. Daher existiert der Schnittpunkt auch auf der Oberfläche des Würfels. \square

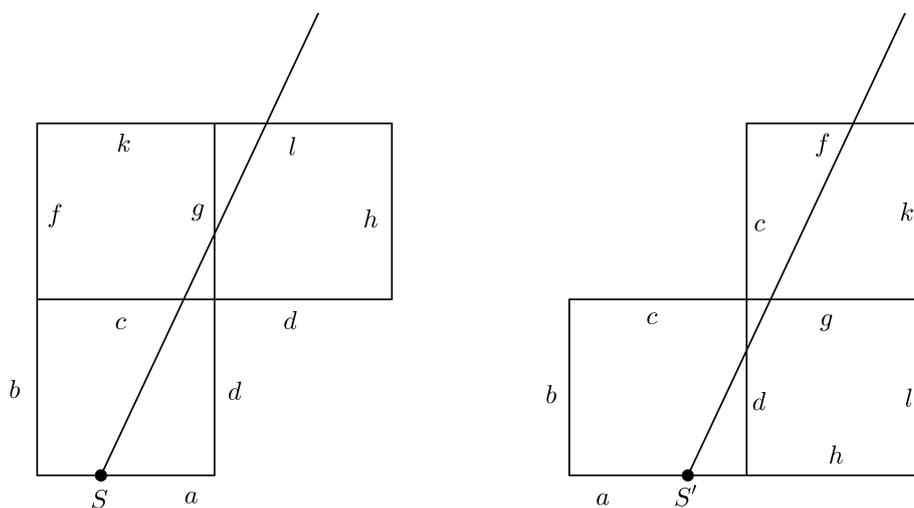


Abbildung 64: Zwei parallele Billardbahnen mit Schnittpunkt

Lemma 9. $f(x) = (\frac{m}{n} \cdot x \bmod 1) | x, m, n \in \mathbb{N}_{>0} \wedge \text{ggT}(m, n) = 1 \wedge n > 1$. Es existiert kein $x \in \mathbb{N}_{>0}$ für das $f(x) \in (0, \frac{1}{n})$

Beweis. $h(x) = \frac{m}{n} \cdot x$ mit $x \in \mathbb{N}_{>0}$. $b \in \mathbb{N}_0$. Es existiert kein $x \in \mathbb{N}_{>0}$ für das $h(x) \in (b, b + \frac{1}{n})$. Daher existiert auch kein $x \in \mathbb{N}_{>0}$ für das $0 < f(x) < \frac{1}{n}$. \square

Lemma 10. $e(x) = 1 - (a + \frac{m}{n} \cdot x \bmod 1) | \text{ggT}(m, n) = 1 \wedge n > 1 \wedge a \in [0, 1] \wedge x \in \mathbb{N}_{>0}$. Es existiert ein $x \in \mathbb{N}_{>0}$ für das $e(x) \leq \frac{1}{n}$

Beweis. $e(x) = 1 - g(x)$ und $g(x) = (a + \frac{m}{n} \cdot x \bmod 1)$. Betrachten wir das Maximum von $g(x)$. Für jedes $l \in \mathbb{N}$ und $l \in [0, n)$ existiert ein $x \in \mathbb{N}$ und $x \in [1, n]$ für welches

$(\frac{m}{n} \cdot x \bmod 1) = \frac{l}{n}$. Daraus folgt für $g(x)$, dass es für jedes a ein x gibt, bei welchem $g(x)$ höchstens $\frac{1}{n}$ von 1 entfernt ist. Daher existiert ein $x \in \mathbb{N}_{>0}$ für das $e(x) \leq \frac{1}{n}$. \square

Satz 13. b_p sei periodisch. t_1 sei der erste Zeitpunkt nach $t = 0$, bei welchem $r_p(S, \alpha, t_1) = (S, \alpha)$. Falls für zwei unterschiedliche Zeitpunkte $t_a, t_b \in (0, t_1)$ mit $t_b > t_a$ die Billardkugel sich auf der gleichen Kante befindet und ein infinitesimaler Zeitpunkt vor t_a und t_b die Billardkugel sich auf der gleichen Fläche X befindet, so ist eine zu b_p kongruente Geodäte **nicht** einfach.

Beweis. $r'_p(S, \alpha, t_a)$ und $r'_p(S, \alpha, t_b) \in$ der gleichen Kante k . Des Weiteren ist $r'_p(S, \alpha, t_a) = A$ und $r'_p(S, \alpha, t_b) = B$. Der linke Eckpunkt, betrachtet im Koordinatensystem A , von k sei M . Die Billardkugel befinde sich einen infinitesimalen Zeitpunkt nach t_a und t_b auf der Fläche Y . Es werden 2 Fälle unterschieden: (1) Der Winkel zwischen der Billardbahn zu Punkt A und der Kante k ist **nicht** gleich wie zu Punkt B (2) Der Winkel zwischen der Billardbahn zu Punkt A und der Kante k ist gleich wie zu Punkt B .

- (1) Es folgt aus **Lemma 7**, dass die Teilstücke der Billardbahn senkrecht zueinander stehen. Dies impliziert, dass es im Netz einen Schnittpunkt gibt, der sich entweder auf der Fläche Y befindet oder auf einem der an Y angrenzenden Flächen.
- (2) α sei der Winkel zwischen der Billardbahn zu Punkt A und der Kante k . Ohne Beschränkung der Allgemeinheit betrachten wir den Fall, dass $\overline{MA} < \overline{MB}$. Die Billardbahn im Netz b_n sei die zu b_p zugehörige Billardbahn. Es gelte: $a = \overline{MA}$. Betrachten wir die Billardbahn im Netz b_n in einem Koordinatensystem, wie auf Abbildung 65 gezeigt. Nennen wir dieses Koordinatensystem B . Die Koordinaten $(0, 0)$ im Koordinatensystem B habe der Punkt M^* . Der Punkt P sei $\in b_n$ und P hat die y -Koordinate 1. Was ist die x -Koordinate von P ? P' sei der Punkt auf der x -Achse mit kleinstem Abstand zu P . Es gilt (Abbildung 65):

$$\tan(\alpha) = \frac{\overline{PP'}}{\overline{AP'}}$$

Da $\overline{PP'} = 1$ gilt:

$$\overline{AP'} = \frac{1}{\tan(\alpha)}$$

Daraus folgt, dass P im Koordinatensystem B die Koordinaten $(a + \frac{1}{\tan(\alpha)}, 1)$ hat.

Für die Koordinaten eines Punktes $P_x \in b_n$ mit dem Wert der y -Koordinate von $x \in \mathbb{N}$ gilt:

$$P_x = (a + \frac{1}{\tan(\alpha)} \cdot x, x)$$

Der Punkt B , betrachtet im Koordinatensystem B als Teilmenge von b_n , ist ein Punkt P_x , ausser für $\alpha = \frac{\pi}{4}$. Dies liegt daran, dass für $\alpha = \frac{\pi}{4}$ die Billardbahn im Netz Seiten nicht parallel zu s auch im Winkel $\frac{\pi}{4}$ schneidet. Die zu beweisende Aussage gilt für alle Fälle ausser $\alpha = \frac{\pi}{4}$. (Abbildung 66). B' sei der Punkt auf der

X – Achse mit kleinstem Abstand zu B im Koordinatensystem B . Es gilt (für $x \in \mathbb{N}_{>0}$):

$$\begin{aligned}\overline{BB'} &= x \\ \overline{M^*A} &= a \\ \overline{AB'} &= \frac{1}{\tan(\alpha)} \cdot x \\ \overline{M^*B'} &= a + \frac{1}{\tan(\alpha)} \cdot x\end{aligned}$$

Da die Geodäte geschlossen ist gilt: $\tan(\alpha) = \frac{n}{m} \mid m, n \in \mathbb{N}_{>0} \wedge \text{ggT}(m, n) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\tan(\alpha)} = \frac{m}{n}$.

Betrachten wir $\overline{M^*B'}$ mit $\tan(\alpha) = \frac{n}{m}$: $\overline{M^*B'} = a + \frac{m}{n} \cdot x$. $\overline{M^*B'} \bmod 1$ ist der Abstand von B zu dem linken Eckpunkt von k auf dem platonischen Körper.

$$\overline{MB} = \overline{M^*B'} = \left(a + \frac{m}{n} \cdot x \bmod 1\right)$$

Dies impliziert, dass es eine natürliche Zahl $l \in \mathbb{N}_{>0}$ gibt, für die $\overline{MB} = \left(a + \frac{m}{n} \cdot x \bmod 1\right) = \left(a + \frac{m}{n} \cdot x - l\right)$. Ziehen wir dann von \overline{MB} a ab erhalten wir: $\left(a + \frac{m}{n} \cdot x - l\right) - a = \frac{m}{n} \cdot x - l$. Da $\overline{MB} > a$ ist, gilt: $\frac{m}{n} \cdot x - l = \left(\frac{m}{n} \cdot x \bmod 1\right)$. Dies ist gleich dem Abstand von A und B auf der Kante k des platonischen Körpers (Abbildung 67). $n \neq 1$, da dann jedenfalls gilt: $\overline{AB} = 0$, was der Voraussetzung widerspricht, da $r_p(S, \alpha, t_a) \neq r_p(S, \alpha, t_b)$.

$$\overline{AB} = \left(\frac{m}{n} \cdot x \bmod 1\right)$$

Betrachten wir nochmals die Funktion $g(x) = \left(a + \frac{m}{n} \cdot x \bmod 1\right)$. $g(x)$ ist der Abstand (im Koordinatensystem B) von P_x zu dem linken Eckpunkt der Kante, auf der sich P_x befindet. Die Funktion $e(x) = 1 - \left(a + \frac{m}{n} \cdot x \bmod 1\right)$ ist der Abstand von P_x zum rechten Eckpunkt. Der rechte Eckpunkt von der Kante auf der sich P_x befindet, sei D_x . Nach **Lemma 10** existiert ein $x \in \mathbb{N}_{>0}$ für das $e(x) \leq \frac{1}{n}$ ist, daher existiert ein Punkt P_x , für welchen $\overline{P_x D_x} \leq \frac{1}{n}$. Nach **Lemma 9** ist \overline{AB} mindestens $\frac{1}{n}$. Es folgt, dass ein Zeitpunkt t_n existiert, für welchen $r'_n(S, \alpha, t_a + t_n)$ nicht Element der gleichen Kante ist wie $r'_n(S, \alpha, t_b + t_n)$. Daher hat nach **Lemma 8** die Billardbahn einen Schnittpunkt. Somit hat auch die geschlossene Geodäte einen Schnittpunkt.

□

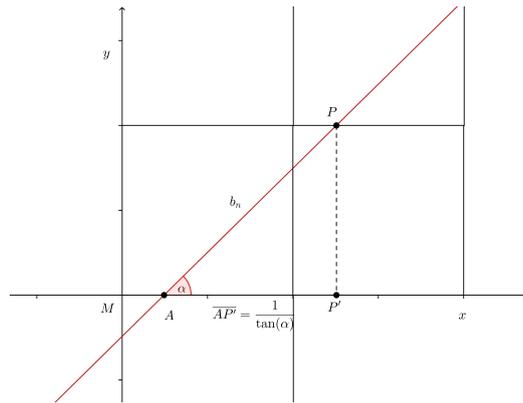


Abbildung 65

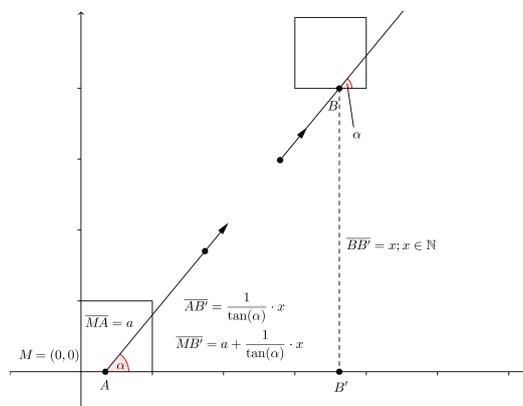


Abbildung 66

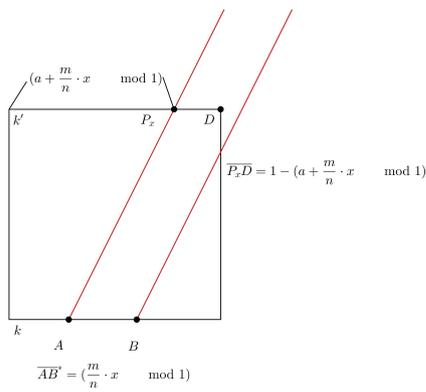


Abbildung 67

b_p sei eine periodische Billardbahn auf ∂P . $t_1 \in \mathbb{R}_{>0}$ löse die Gleichung $r_p(S, \alpha, 0) = r_p(S, \alpha, t_1)$. Es existiert kein $t_n \in \mathbb{R}$ mit $t_n \in (0, t_1)$, welches die Gleichung löst. Hat b_p eine Periodenzahl von mehr als 24, so existieren 3 Zeitpunkte $t_a, t_b, t_c \in [0, t_1]$, zu denen die Billardkugel Element der gleichen Kante ist. Ein infinitesimaler Zeitpunkt vor t_a, t_b, t_c ist die Billardkugel Element der Fläche X oder Y . Also ist die Billardkugel einen infinitesimalen Zeitpunkt vor zweier der drei Zeitpunkte t_a, t_b, t_c Element der gleichen Fläche. Nach **Satz 13** hat dann b_p einen Schnittpunkt.

Zu t_n sei die Billardkugel zum n -ten Mal Element einer Kante. Nun betrachten wir den Verlauf der Billardkugel von Startpunkt $S \in a$. Zu t_1 ist die Billardkugel zum ersten Mal \in einer Kante. Diese Kante ist entweder c oder d , da der Abschusswinkel $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ist. Zu t_2 ist die Billardkugel zum zweiten Mal \in einer Kante. Im Falle dass $r'_p(S, \alpha, t_1) \in c$ so ist es einer der Kanten f, k oder g . Die Folge, beispielsweise, der Buchstaben abj repräsentiert die Menge aller Billardbahnen, bei der die Billardkugel zu $t = 0$ Element der Kante a , zu t_1 Element der Kante b und zu t_2 Element der Kante j ist.

Definition 21. (Buchstabenfolge) Die Folge der Buchstaben $x_1x_2x_3\dots x_n$, mit der Bedingung, dass $x_k \in \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, l, k, l\}$ repräsentieren eine Menge von Billardbahnen mit der Eigenschaft, dass die n -te Stelle der Folge der Buchstaben bedeutet, dass die Billardkugel zu $t_n \in$ der n -te Stelle der Folge ist. Diese Folge heisst Buchstabenfolge.

Kennt man die Elemente x_n und x_{n-1} der Buchstabenfolge so kommen nur gewisse x_k für x_{n+1} in Frage. Beispielsweise sei $x_n = c$ und $x_{n-1} = k$. Als x_{n+1} kommen nur a, b oder d in Frage. Jedoch sei beispielsweise $x_n = c$ und $x_{n-1} = g$ und es kommen als x_{n+1} nur a oder b in Frage, da die Billardbahn geradlinig ist. Zur Vorstellung ist es hilfreich Abbildung 63 zu betrachten. Nach diesem Schema ist Tabelle 1 aufgebaut.

Das erste Glied der Buchstabenfolge x_1 ist immer a . Das zweite Glied der Buchstabenfolge ist entweder c oder d , da der Abschusswinkel $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Ab Glied 3 wird die Buchstabenfolge nach Tabelle 1 fortgesetzt.

Beispiel. Die Buchstabenfolge abj repräsentiert die Menge aller Billardbahnen, bei denen die Billardkugel zu $t = 0 \in$ der Kante a ist, zu t_1 Element der Kante b ist und zu t_2 Element der Kante j ist. Nach Tabelle 1 ist die Billardkugel zu t_3 Element einer der Kanten k, l, i . Die Menge der Billardbahnen repräsentiert durch $(abjk \cup abjl \cup abji)$ ist fast gleich wie die Menge abj , nur sind die Billardbahnen die j in einem Eckpunkt treffen nicht enthalten.

Zur Klassifikation aller einfach geschlossener Geodäten setzten wir die Buchstabenfolge nach Tabelle 1 solange fort, bis entweder die Periodenzahl 24 überschritten wird, oder eines der folgenden Fälle eintritt, welche eine einfache geschlossene Geodäte verunmöglichen:

- (1) Enthält einfach geschlossenen Geodäte (Überprüfung) (wird rot markiert)
Bsp: ackia

x_n	x_{n-1}	x_{n+1}	x_{n-1}	x_{n+1}	x_{n-1}	x_{n+1}
a	e	c, d	i	b, c, d	h	b, c
a	b	i, h	c	e, i, h	d	e, i
b	a	f, j	d	e, j, f	c	e, j
b	f	a, d	j	a, c, d	e	c, d
c	b	g, k	a	f, k, g	d	f, k
c	g	a, b	k	a, b, d	f	a, d
d	a	g, l	b	g, l, h	c	l, h
d	g	a, b	l	a, b, c	h	b, c
e	a	f, j	h	b, f, j	i	b, f
e	j	a, h	f	a, h, i	b	h, i
f	b	g, k	e	c, g, k	j	c, g
f	k	b, e	g	b, e, j	c	e, j
g	c	h, l	f	d, h, l	k	d, h
g	l	c, f	f	c, f, k	d	f, k
h	d	e, i	g	a, e, i	l	a, e
h	i	d, g	e	d, g, l	a	g, l
i	e	k, l	a	j, k, l	h	j, k
i	l	e, a	k	e, a, h	j	a, h
j	f	l, i	b	k, l, i	e	k, l
j	i	f, b	l	f, b, e	k	b, e
k	f	l, i	c	j, l, i	g	i, j
k	l	f, c	i	f, c, g	j	c, g
l	g	i, j	d	i, j, k	h	j, k
l	i	g, d	j	g, d, h	k	d, h

Tabelle 1: Tabelle für die Fortsetzung der Buchstabenfolge

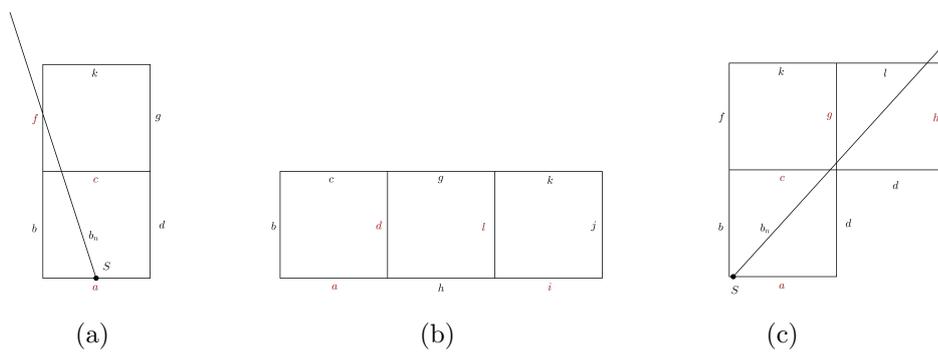


Abbildung 68

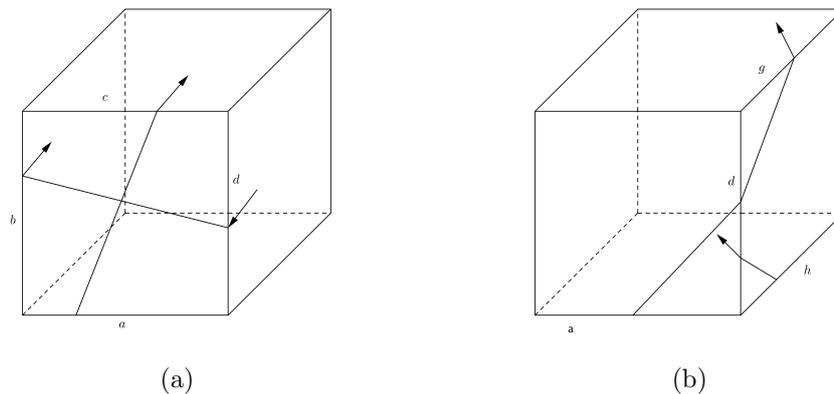


Abbildung 69

- (2) Nach **Satz 13** nicht möglich. (wird blau markiert)
 Bsp: adlcbd : Dies ist nach **Satz 13** nicht möglich, da die Billardkugel zu zwei verschiedenen Zeitpunkten \in Kante d und ein infinitesimaler Zeitpunkt vor den beiden Zeitpunkten die Billardkugel \in der gleichen Fläche ist.
- (3) b_n zu b_p nicht möglich (wird grün markiert)
 Bsp: acf (Abbildung 68(a)): erfüllt $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$ nicht; adli (Abbildung 68(b)): b_n kann nicht existieren; acgh (Abbildung 68(c)); b_n kann nicht existieren.
- (4) Hat sicher einen Schnittpunkt (wird gelb markiert)
 Bsp: ackihdb: ac und db befinden sich auf der gleichen Fläche (Abbildung 69(a)); adgfjihd: adg und hd wird sicher einen Schnittpunkt haben (Abbildung 69(b)).

Jetzt beginnen wir die Buchstabenfolgen fortzusetzen.

Gliedanzahl 1

a

Gliedanzahl 2

ac; ad

Gliedanzahl 3

acf; ack; acg; adg; adl

Gliedanzahl 4

ackj; acki; ackl; acgh; acgl; adgf; adgk; adli; adlj; adlk

Gliedanzahl 5

ackie; ackia; ackih; ackld; acklh; acglj; acgli; adgfb; adgfe; adgfj; adgkj; adgki; adlje; adljb; adljf; adllc; adlkf

Gliedanzahl 6

ackihd; ackihg; acklha; acklhe; acglje; acgljb; acgljf; acglie; acglia; adgfea; adgfeh;

adgfei; adgfji; **adgfjl**; **adgfjk**; **adgkjf**; adgkjb; adgkje; adgkie; **adgkia**; **adgkib**; **adljba**;
adljbd; adljbc; **adljfg**; adljfc; adlkfb; adlkfe

Gliedanzahl 7

ackihdb; **ackihdc**; **acgljea**; **acgljeh**; **acgljbc**; **acgljbd**; acgljba; acglieb; acglief; **adgfehd**;
adgfeh; adgfehl; adgfeil; **adgfeik**; **adgfjia**; adgfjih; **adgkjbc**; **adgkjbd**; adgkjba;
adgkja; **adgkjh**; adgkieb; **adgkief**; **adljbec**; adljbcg; **adljfgd**; **adljfca**; **adljfcd**; **adlkfbd**;
adlkfba; **adlkfea**; **adlkfeh**; **adlkfei**

Gliedanzahl 8

acgljbai; acgljbah; **acgliebc**; **acgliebd**; **acgliefc**; **acgliefg**; **acgliefk**; adgfehlk; **dgfehlj**;
adgfeild; **adgfeilg**; **adgfjihd**; **adgfjihg**; adgkjbah; **adgkjbai**; adgkiebc; **adgkiebd**; **adl-**
jbcgh; **adljbcgl**; **adlkfbah** adlkfbai

Gliedanzahl 9

acgljbahg; **acgljbahl**; **adgfehlkf**; **adgfehlkc**; **adgfeilda**; adgfeildb; adgfeildc; **adgkjbahl**;
adgkjbahg; **adgkiebck**; adgkiebcg; adlkfbai; **adlkfbae**; adlkfbah

Gliedanzahl 10

acgljbahgc; **acgljbahgf**; **acgljbahgk**; **adgfeildbf**; **adgfeildbj**; **adgfeildbe**; **adgfeildcf**; **adg-**
feildck; **adgkiebcgl**; **adgkiebcgh**; **adlkfbaij**; **adlkfbaik**; **adlkfbail**; **adlkfbahg**; **adlkfbahl**

Die Buchstabenfolgen ackia; acgljea; adgfjia; adgkja und adlkfea könnten einfach geschlossene Geodäten repräsentieren. Überprüfen wir die Fälle einzeln. Falls sie eine einfach geschlossene Geodäte repräsentieren hat die Geodäte eine Periodenzahl eins kleiner als die Gliedanzahl, da andere Geodäten mit höherer Periodenzahl, welche durch die gleiche Buchstabenfolge repräsentiert werden, nach **Satz 13** nicht einfach sind. Der Sonderfall des Beweises von **Satz 13** ($\alpha = \frac{\pi}{4}$) ist eine einfach geschlossene Geodäte.

- (1) ackia: Repräsentiert die Billardbahn der einfach geschlossenen Geodäte mit $S \in (0, 1)$ und $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Abbildung 70.
- (2) acgljea: Repräsentiert die Billardbahn der einfach geschlossenen Geodäte mit $S \in (0, \frac{1}{2})$ und $\alpha = \tan^{-1}(2)$. Abbildung 71.
- (3) adgfjia: Repräsentiert die Billardbahn der einfach geschlossenen Geodäte mit $S \in (\frac{1}{2}, 1)$ und $\alpha = \tan^{-1}(2)$. Abbildung 72.
- (4) adgkja: Repräsentiert die Billardbahn der einfach geschlossenen Geodäte mit $S \in (0, 1)$ und $\alpha = \frac{\pi}{4}$. Abbildung 73.
- (5) adlkfea: Repräsentiert die Billardbahn der einfach geschlossenen Geodäte mit $S \in (0, 1)$ und $\alpha = \tan^{-1}(\frac{1}{2})$. Abbildung 74.

Jede einfach geschlossene Geodäte von Klasse (2) ist kongruent zu einer einfach geschlossenen Geodäte von Klasse (3) oder Klasse (5). Dabei ist anzumerken, dass die Winkel $\tan^{-1}(2) + \tan^{-1}(\frac{1}{2})$ zusammen $\frac{\pi}{2}$ geben. Dies liegt daran, dass die Billardbahnen im Netz

auf Kanten treffen, welche nicht im gleichen Winkel wie der Abschusswinkel geschnitten werden. Daher werden die Klasse (2),(3) und (5) zu einer Klasse einfach geschlossener Geodäten zusammengefasst. Alle einfach geschlossenen Geodäten einer Klasse haben die gleiche Länge. Damit ergibt sich die Klassifikation einfach geschlossener Geodäten auf dem Würfel.

Alle einfach geschlossenen Geodäten auf dem Würfel lassen sich in einer der Klassen (1),(2) oder (3) einordnen, dabei haben sie eine spezifische Länge und sind kongruent zu einer Billardbahn b_p mit spezifischem Abschusswinkel α . (Tabelle 2)

Klasse	α	Länge
(1)	$\frac{\pi}{2}$	4
(2)	$\tan^{-1}(2)$ oder $\tan^{-1}(\frac{1}{2})$	$2\sqrt{5}$
(3)	$\frac{\pi}{4}$	$3\sqrt{2}$

Tabelle 2: Klassen einfach geschlossener Geodäten auf dem Würfel

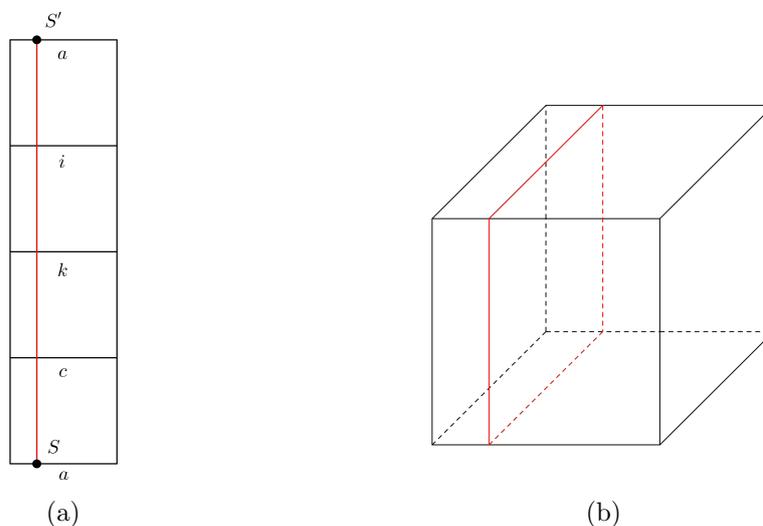


Abbildung 70: Einfach geschlos. Geodäte kongruent zu b_p mit $S = 0.25$ und $\alpha = \frac{\pi}{2}$

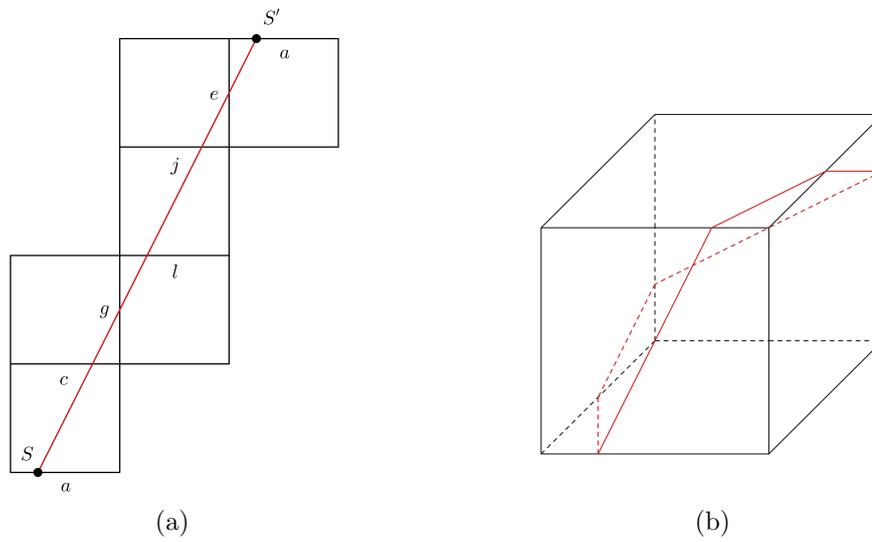


Abbildung 71: Einfach geschlos. Geodäte kongruent zu b_p mit $S = 0.25$ und $\alpha = \tan^{-1}(2)$

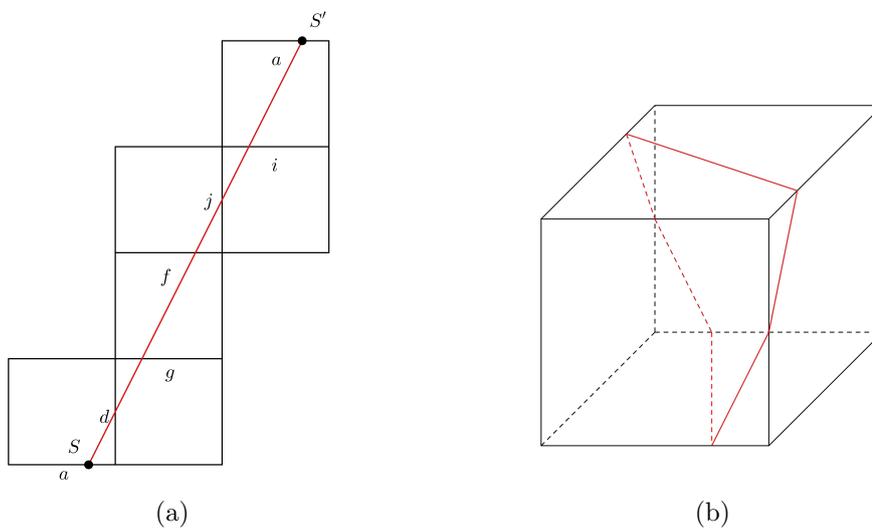


Abbildung 72: Einfach geschlos. Geodäte kongruent zu b_p mit $S = 0.75$ und $\alpha = \tan^{-1}(2)$

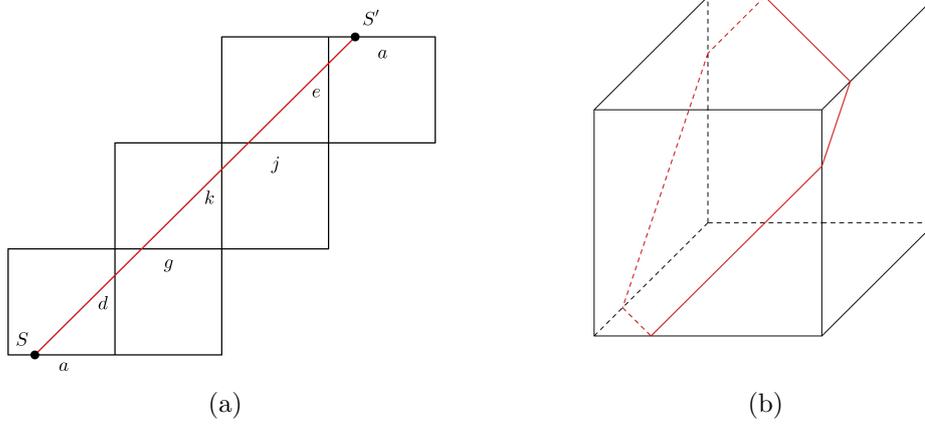


Abbildung 73: Einfach geschlos. Geodäte kongruent zu b_p mit $S = 0.25$ und $\alpha = \frac{\pi}{4}$

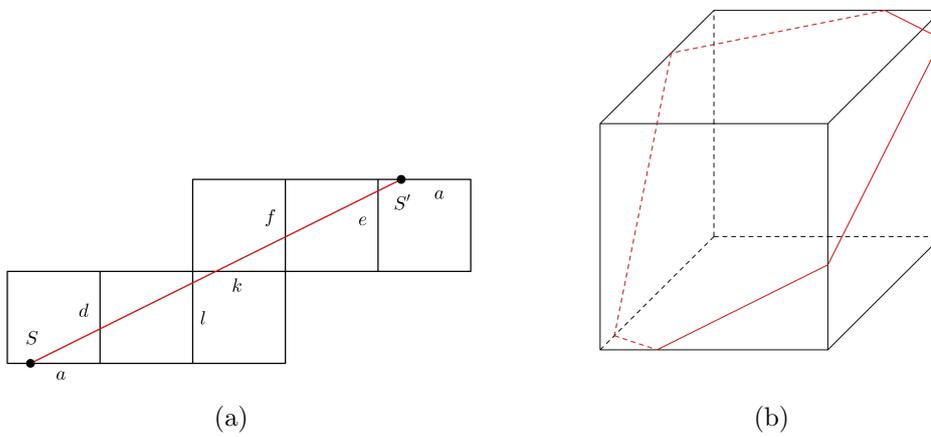


Abbildung 74: Einfach geschlos. Geodäte kongruent zu b_p mit $S = 0.25$ und $\alpha = \tan^{-1}(\frac{1}{2})$

5.3.3 Oktaeder

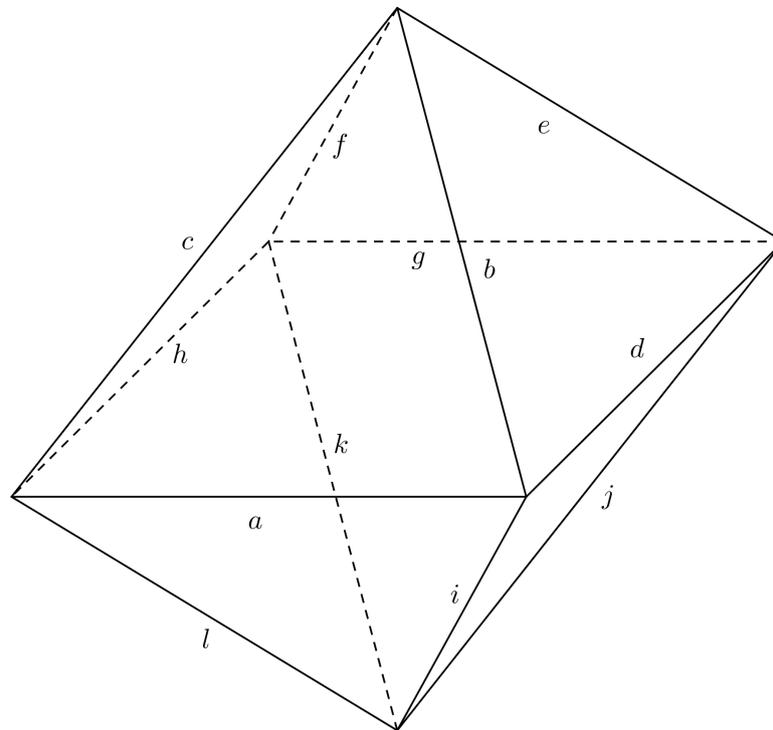


Abbildung 75

Abbildung 75 zeigt ein Oktaeder, dessen Kanten mit $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l$ beschrieben sind. Es wird ähnlich wie beim Würfel vorgegangen.

Lemma 11. *Die Menge der Teilstücke einer Billardbahn b_p , die auf einer Fläche des Oktaeders liegen, sind entweder parallel zueinander oder stehen in einem Winkel von $\frac{\pi}{3}$ zueinander*

Beweis. In dem Verlauf einer Billardbahn b_n im Netz erscheint jede Fläche in maximal 3 verschiedenen Positionen, die sich nur durch Rotationen um $\frac{2\pi}{3}$ unterscheiden. Sind zwei Flächen gleich beschrieben, aber unterscheiden sich um eine Drehung um $2 \cdot \pi$ sind die Teilstücke der Billardbahn auf dem Würfel parallel zueinander. Sind zwei Flächen gleich beschrieben, aber unterscheiden sich um eine Drehung um $\frac{2\pi}{3}$ oder $\frac{4\pi}{3}$ stehen die Teilstücke der Billardbahn auf dem Oktaeder in einem Winkel von $\frac{\pi}{3}$ zueinander. Somit sind die Teilstücke einer Billardbahn b_p , die auf einer Fläche des Oktaeders liegen, entweder parallel zueinander oder stehen in einem Winkel von $\frac{\pi}{3}$ zueinander. \square

Lemma 12. *Zwei Billardbahnen b_p (b_p mit Startpunkt S) und b_p^* (b_p^* mit Startpunkt S') haben den gleichen Abschusswinkel und $S, S' \in a$. Falls ein Zeitpunkt $t \in \mathbb{R}_{>0}$ existiert,*

bei dem $r'_p(S, \alpha, t)$ und $r'^*_p(S', \alpha, t)$ nicht Element der gleichen Kante ist, so haben b_p und b^*_p einen Schnittpunkt.

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit betrachten wir den Fall, dass $r'_p(S, \alpha, 0)$ und $r'^*_p(S', \alpha, 0) \in a$ und zu t_1 $r'_p(S, \alpha, t_1) \in e$ und $r'^*_p(S', \alpha, t_1) \in g$. (Abbildung 76)

b_p bewegt sich von Kante e über g und j nach i . b^*_p bewegt sich von Kante d über g und j nach f . b_p hat mit b^*_p einen Schnittpunkt. \square

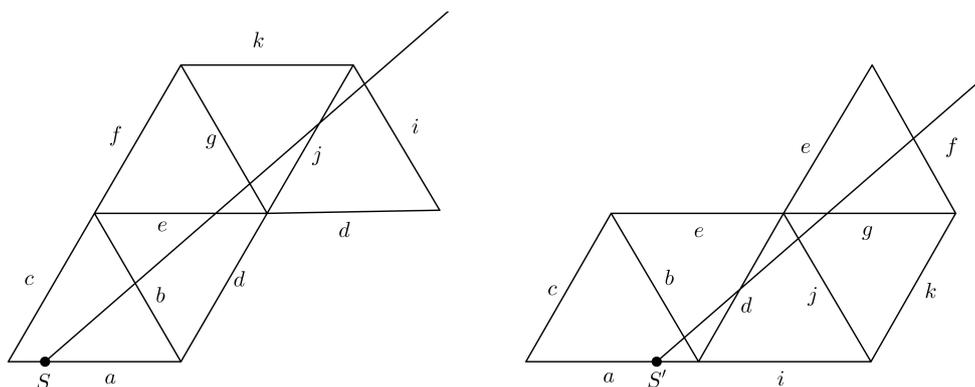


Abbildung 76: Zwei parallele Billardbahnen mit Schnittpunkt

Lemma 13. Für $m, n \in \mathbb{N}_{>0}$ und $\text{ggt}(m, n) = 1$ und zwei ungleiche, **gerade** Zahlen $x, y \in (0, 2 \cdot n]$ gilt: $m \cdot x \not\equiv m \cdot y \pmod{2 \cdot n}$

Beweis. Annahme des Gegenteils: $m \cdot x \equiv m \cdot y \pmod{2 \cdot n} \Leftrightarrow m \cdot (x - y) \equiv 0 \pmod{2 \cdot n}$. Da $m \neq 0$ muss $(x - y) = 0$ sein. Dies ist aber nur der Fall, wenn $x \equiv y \pmod{2 \cdot n}$, entgegen der Voraussetzung. \square

Lemma 14. Für $m, n \in \mathbb{N}_{>0}$ und $\text{ggt}(m, n) = 1$ und zwei ungleiche, **ungerade** Zahlen $x, y \in (0, 2 \cdot n]$ gilt: $m \cdot x + n \not\equiv m \cdot y + n \pmod{2 \cdot n}$

Beweis. Beweis wortgleich wie Beweis von Lemma 13. \square

Lemma 15. Für $m, n, x \in \mathbb{N}_0$ und $\text{ggt}(m, n) = 1$ sei $f(x)$ folgende Funktion:

- (1) Für $x \in \{2 \cdot c \mid c \in \mathbb{N}_0\}$: $f(x) = \left(\frac{m \cdot x}{2 \cdot n} \pmod{1}\right)$
- (2) Für $x \in \{2 \cdot d + 1 \mid d \in \mathbb{N}_{>0}\}$: $f(x) = \left(\frac{m \cdot x}{2 \cdot n} + \frac{1}{2} \pmod{1}\right)$

Für $f(x)$ gilt mit Unterscheidung folgender Fälle und $b \in \mathbb{N}_0$:

- (1) m, n beide ungerade natürliche Zahlen: Es existiert kein $x \in \mathbb{N}_{>0}$ für welches $f(x) \in (b, b + \frac{1}{n})$

- (2) m, n nicht beide ungerade natürliche Zahlen: Es existiert kein $x \in \mathbb{N}_{>0}$ für welches $f(x) \in (b, b + \frac{1}{2 \cdot n})$

Beweis. Unterscheiden wir die beiden Fälle:

- (1) m, n beide ungerade natürliche Zahlen: Aus **Lemma 13** und der Tatsache, dass $m \cdot x$ für ein gerades x eine gerade Zahl ist folgt, dass es für jede natürliche Zahl $i \in [0, n)$ ein gerades $x \in (0, 2 \cdot n]$ gibt für welches $m \cdot x \equiv 2 \cdot i \pmod{2 \cdot n}$. Daraus folgt: Für jedes Element der Menge $\{\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 0\}$ existiert ein gerades $x \in (0, 2 \cdot n]$, für welches $f(x)$ gleich dem Element der Menge ist und für jedes gerade x ist $f(x) \in \{\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 0\}$. Aus **Lemma 14** und der Tatsache, dass $m \cdot x + n$ für ein ungerades x eine gerade Zahl ist folgt, dass es für jede natürliche Zahl $i \in [0, n)$ ein ungerades $x \in (0, 2 \cdot n]$ gibt, für welches $m \cdot x + n \equiv 2 \cdot i \pmod{2 \cdot n}$. Daraus folgt: Für jedes Element der Menge $\{\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 0\}$ existiert ein ungerades $x \in (0, 2 \cdot n]$, für welches $f(x)$ gleich dem Element der Menge ist und für jedes ungerade x ist $f(x) \in \{\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 0\}$. Damit ist die gesuchte Aussage bewiesen.
- (2) m, n nicht beide ungerade natürliche Zahlen: Für $f(x)$ mit einem geraden x gilt das gleiche wie bei Fall (1). Aus **Lemma 14** und der Tatsache, dass $m \cdot x + n$ für ein ungerades x eine ungerade Zahl ist folgt, dass es für jede natürliche Zahl $i \in [0, n)$ ein ungerades $x \in (0, 2 \cdot n]$ gibt für welches $m \cdot x + n \equiv 2 \cdot i + 1 \pmod{2 \cdot n}$. Daraus folgt: Für jedes Element der Menge $\{\frac{1}{2 \cdot n}, \frac{3}{2 \cdot n}, \dots, \frac{2 \cdot n - 3}{2 \cdot n}, \frac{2 \cdot n - 1}{2 \cdot n}\}$ existiert ein ungerades $x \in (0, 2 \cdot n]$, für welches $f(x)$ gleich dem Element der Menge ist und für jedes ungerade x ist $f(x) \in \{\frac{1}{2 \cdot n}, \frac{3}{2 \cdot n}, \dots, \frac{2 \cdot n - 3}{2 \cdot n}, \frac{2 \cdot n - 1}{2 \cdot n}\}$. Damit ist die gesuchte Aussage bewiesen.

□

Lemma 16. $f(x)$ und m, n, x seien gleich definiert wie bei **Lemma 15**. $a \in [0, 1]$. $g(x)$ sei folgend definiert:

- (1) Für $x \in \{2 \cdot c \mid c \in \mathbb{N}_0\}$: $g(x) = (a + \frac{m \cdot x}{2 \cdot n} \pmod{1})$
 (2) Für $x \in \{2 \cdot d + 1 \mid d \in \mathbb{N}_{>0}\}$: $g(x) = (a + \frac{m \cdot x}{2 \cdot n} + \frac{1}{2} \pmod{1})$

$e(x) = 1 - g(x)$. Für $e(x)$ in den unterschiedlichen Fällen gilt:

- (1) m, n beide ungerade natürliche Zahlen: Es existiert ein $x \in \mathbb{N}_{>0}$ für welches $e(x) \in (0, \frac{1}{n})$
 (2) m, n nicht beide ungerade natürliche Zahlen: Es existiert ein $x \in \mathbb{N}_{>0}$ für welches $e(x) \in (0, \frac{1}{2 \cdot n})$

Beweis. Wir unterscheiden die Fälle:

- (1) m, n beide ungerade natürliche Zahlen: Aus den Aussagen des Beweisen von **Lemma 15** folgt, dass $g(x)$ mindestens $\frac{1}{n}$ an 1 heran kommt und daher die gesuchte Aussage bewiesen ist.

- (2) m, n nicht beide ungerade natürliche Zahlen: Aus den Aussagen des Beweisen von **Lemma 15** folgt, dass $g(x)$ mindestens $\frac{1}{2 \cdot n}$ an 1 heran kommt und daher die gesuchte Aussage bewiesen ist.

□

Satz 14. b_p sei periodisch. Falls für zwei unterschiedliche Zeitpunkte $t_a, t_b \in (0, t_1)$ mit $t_b > t_a$ die Billardkugel sich auf der gleichen Kante befindet und ein infinitesimaler Zeitpunkt vor t_a und t_b die Billardkugel sich auf der gleichen Fläche X befindet, so ist eine zu b_p kongruente Geodäte **nicht** einfach. (Zur Orientierung: Abbildung 65 bis 67)

Beweis. $r'_p(S, \alpha, t_a)$ und $r'_p(S, \alpha, t_b) \in$ der gleichen Kante k . Des Weiteren ist $r'_p(S, \alpha, t_a) = A$ und $r'_p(S, \alpha, t_b) = B$. Der linke Eckpunkt von k sei M . Die Billardkugel befinde sich einen infinitesimalen Zeitpunkt nach t_a und t_b auf der Fläche Y . Es werden 2 Fälle unterschieden: (1) Der Winkel zwischen der Billardbahn zu Punkt A und der Kante k ist **nicht** gleich wie zu Punkt B (2) Der Winkel zwischen der Billardbahn zu Punkt A und der Kante k ist gleich wie zu Punkt B .

- (1) Es folgt nach **Lemma 11**, dass die Teilstücke der Billardbahn in einem Winkel von $\frac{\pi}{3}$ zueinander stehen. Dies impliziert, dass es im Netz einen Schnittpunkt gibt, der sich entweder auf der Fläche Y befindet oder auf einem der angrenzenden Flächen. Daher existiert der Schnittpunkt auch auf der Oberfläche des Oktaeders.
- (2) α sei der Winkel zwischen der Billardbahn zu Punkt A und der Kante k . Ohne Beschränkung der Allgemeinheit betrachten wir den Fall, dass $\overline{MA} < \overline{MB}$. Die Billardbahn b_n sei die zu b_p zugehörige Billardbahn. Es gelte: $a = \overline{MA}$. Betrachten wir die Billardbahn im Netz b_n in einem Koordinatensystem (vergleiche mit Abbildung 65). Nennen wir dieses Koordinatensystem B . Die Koordinaten $(0, 0)$ im Koordinatensystem B habe der Punkt M^* . Der Punkt P sei $\in b_n$ und P hat die y -Koordinate $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Was ist die x -Koordinate von P ? P' sei der Punkt auf der x -Achse mit kleinstem Abstand zu P . Es gilt:

$$\tan(\alpha) = \frac{\overline{PP'}}{\overline{AP'}}$$

Da $\overline{PP'} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ gilt:

$$\overline{AP'} = \frac{\sqrt{3}}{2 \cdot \tan(\alpha)}$$

Daraus folgt, dass P im Koordinatensystem B die Koordinaten $(a + \frac{\sqrt{3}}{2 \cdot \tan(\alpha)}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ hat.

Für die Koordinaten eines Punktes $P_x \in b_n$ mit einem Wert der y -Koordinate von $\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot x$ mit $x \in \mathbb{N}$ gilt:

$$P_x = (a + \frac{\sqrt{3}}{2 \cdot \tan(\alpha)} \cdot x, \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot x)$$

Der Punkt B , betrachtet im Koordinatensystem B als Teilmenge von b_n , ist ein Punkt P_x , ausser $\alpha = \frac{\pi}{3}$ oder $\alpha = \frac{\pi}{6}$. Dies liegt daran, dass für $\alpha = \frac{\pi}{3}$ oder $\alpha = \frac{\pi}{6}$ die Billardbahn im Netz Seiten nicht parallel zu s auch im Winkel $\alpha = \frac{\pi}{3}$ oder $\alpha = \frac{\pi}{6}$ schneidet. Die zu beweisende Aussage gilt für alle Fälle ausser $\alpha = \frac{\pi}{3}$ oder $\alpha = \frac{\pi}{6}$. B' sei der Punkt auf der X – Achse mit kleinstem Abstand zu B . Es gilt für $x \in \mathbb{N}_{>0}$:

$$\begin{aligned}\overline{BB'} &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot x \\ \overline{M^*A} &= a \\ \overline{AB'} &= \frac{\sqrt{3}}{2 \cdot \tan(\alpha)} \cdot x \\ \overline{M^*B'} &= a + \frac{\sqrt{3}}{2 \cdot \tan(\alpha)} \cdot x\end{aligned}$$

Da die Geodäte geschlossen ist gilt: $\tan(\alpha) = \sqrt{3} \cdot \frac{n}{m} | n, m \in \mathbb{N}_{>0} \wedge \text{ggT}(n, m) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\tan(\alpha)} = \frac{m}{\sqrt{3} \cdot n}$.

Betrachten wir $\overline{M^*B'}$ mit $\frac{1}{\tan(\alpha)} = \frac{m}{\sqrt{3} \cdot n}$: $\overline{M^*B'} = a + \frac{\sqrt{3} \cdot m}{2 \cdot \sqrt{3} \cdot n} \cdot x = a + \frac{m}{2 \cdot n} \cdot x$. $\overline{MB'}$ mod 1 ist der Abstand von B zu dem linken Eckpunkt für ein gerades x . $\overline{MB^*}$ ist der Abstand von B zu dem linken Eckpunkt im Netz. Wegen der Platzierung der regelmässigen Dreiecke der Parkettierung ist $\overline{MB^*}$ unterschiedlich für ein gerades und ungerades x . Dies wird durch Abbildung 77 veranschaulicht. Es gilt für $\overline{MB^*}$ auf der Kante k für ein gerades x :

$$\overline{MB^*} = \left(a + \frac{m}{2 \cdot n} \cdot x \pmod{1} \right)$$

Für den den Abstand \overline{MB} auf der Kante k für ungerades x :

$$\overline{MB^*} = \left(a + \frac{1}{2} + \frac{m}{2 \cdot n} \cdot x \pmod{1} \right)$$

Da $\overline{MA} < \overline{MB}$ gilt: Der Abstand \overline{AB} ist durch die folgende Funktion für Variables x geschrieben. \overline{AB} ist eines dieser Zahlen. \overline{AB} für ein gerades x :

$$\overline{AB} = \left(\frac{m}{2 \cdot n} \cdot x \pmod{1} \right)$$

Der Abstand \overline{AB} auf der Kante k für ungerades x :

$$\overline{AB} = \left(\frac{1}{2} + \frac{m}{2 \cdot n} \cdot x \pmod{1} \right)$$

Betrachten wir nochmals die Funktion $g(x)$ aus **Lemma 16**. $g(x)$ ist der Abstand (im Koordinatensystem B) von P_x zu dem linken Eckpunkt der Kante auf der sich P_x befindet. Die Funktion $e(x) = 1 - g(x)$ ist der Abstand von P_x zum rechten Eckpunkt. Der rechte Eckpunkt von der Kante auf der sich P_x befindet sei D_x . Unterscheiden wir wieder die beiden Fälle:

- (a) m, n beide ungerade natürliche Zahlen: Nach **Lemma 16** existiert ein $x \in \mathbb{N}_{>0}$ für das $e(x) \leq \frac{1}{n}$, daher existiert ein Punkt P_x , für welchen $\overline{P_x D_x} \leq \frac{1}{n}$. Nach **Lemma 15** ist \overline{AB} mindestens $\frac{1}{n}$.
- (b) m, n nicht beide ungerade natürliche Zahlen: Nach **Lemma 16** existiert ein $x \in \mathbb{N}_{>0}$ für das $e(x) \leq \frac{1}{2 \cdot n}$, daher existiert ein Punkt P_x , für welchen $\overline{P_x D_x} \leq \frac{1}{2 \cdot n}$. Nach **Lemma 15** ist \overline{AB} mindestens $\frac{1}{2 \cdot n}$.

Es folgt, dass ein Zeitpunkt t_n existiert, für welchen $r'_n(S, \alpha, t_a + t_n)$ nicht Element der gleichen Kante ist wie $r'_n(S, \alpha, t_b + t_n)$. Daher hat nach **Lemma 12** die Billardbahn einen Schnittpunkt. Somit hat auch die geschlossene Geodäte einen Schnittpunkt.

□

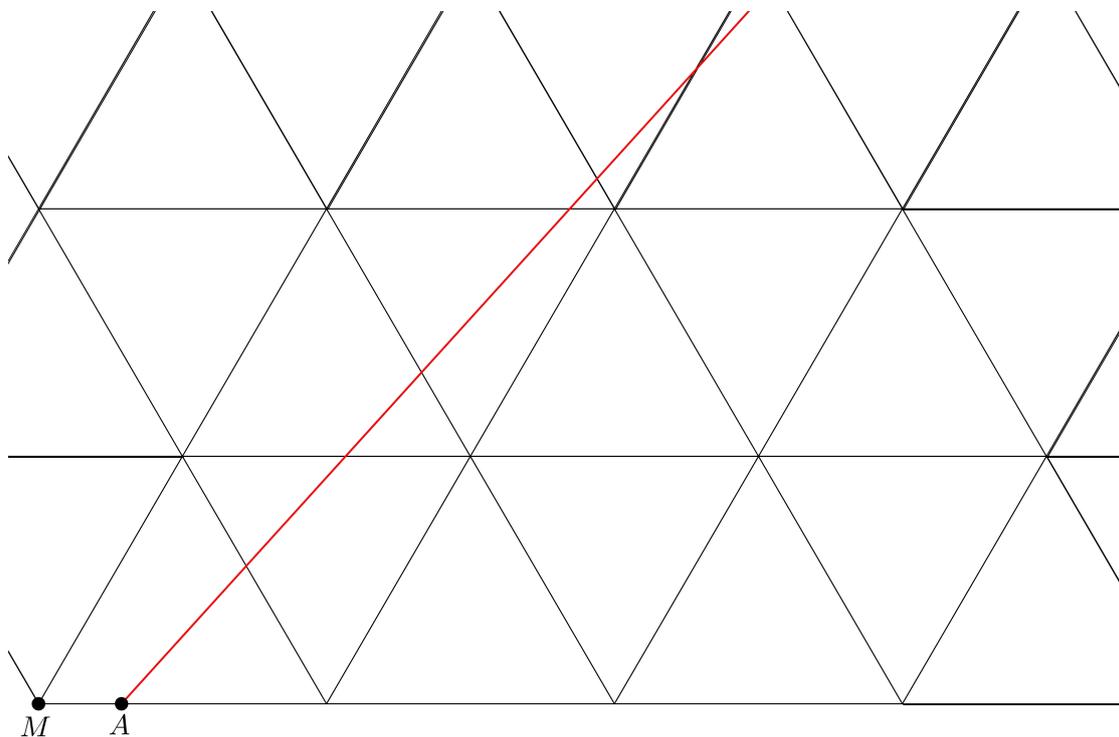


Abbildung 77

Das Problem wird wieder mit der Fortsetzung der Buchstabenfolge gelöst. Tabelle 3 zeigt die Regeln für die Fortsetzung der Buchstabenfolge. Die Buchstabenfolgen werden mit den gleichen Farben für die gleichen Fälle der Unmöglichkeit einfach geschlossener Geodäten der Fortsetzung der Buchstabenfolge des Würfels markiert.

x_n	x_{n-1}	x_{n+1}	x_{n-1}	x_{n+1}
a	l, i	b, c	b, c	l, i
b	c, a	e, d	e, d	c, a
c	a, b	f, h	f, h	a, b
d	b, e	i, j	i, j	b, e
e	b, d	f, g	f, g	b, d
f	e, g	c, h	c, h	e, g
g	e, f	j, k	j, k	e, f
h	c, f	l, k	l, k	c, f
i	a, l	d, j	d, j	a, l
j	d, i	g, k	g, k	d, i
k	g, j	h, l	h, l	g, j
l	h, k	a, i	a, i	h, k

Tabelle 3: Tabelle für die Fortsetzung der Buchstabenfolge

Gliedanzahl 1

a

Gliedanzahl 2

ab; ac

Gliedanzahl 3

abd; abe; acf; ach

Gliedanzahl 4

abdi; abdj; abef; abeg; acfe; acfg

Gliedanzahl 5

abdjg; abdjkc; abefc; abefh; abegk; abegj; acfeb; acfed

Gliedanzahl 6

abdjge; abdjgf; abdjkl; abdjkh; abefhl; abefhk; abefhl; abegkh; abegkl; acfedi; acfedj

Gliedanzahl 7

abdjkhc; abdjgfc; abdjgfh; abdjkhf; abefhkj; abefhkg; abegkhc; abegkhf; abegkla; abegkli; acfedil; acfedia; acfedjk; acfedjg

Gliedanzahl 8

abdjkhca; abdjkhcb; abdjgfa; abdjgfc; abdjgfh; abdjgfhk; abdjkhfe; abdjkhfg; abefhkji; abefhkjd; abegkhca; abegkhcb; abegklid; abegklij; acfedilh; acfedilk; acfed-jkl; acfedjkh;

Gliedanzahl 9

abdjgfcald; abdjgfcald; **abdjgfhla**; abdjgfhli; abdjkhfeb; **abdjkhfed**; **abefhkjia**; **abefhkjil**; abefhkjldb; **abefhkjde**; **abegkhal**; abegkhcai; abegklidb; **abegklide**; **acfedilhc**; **acfedilhf**; **acfedilkjg**; **acfedilkj**; **acfedjkla**; **acfedjkli**

Gliedanzahl 10

abdjgfcaldh; abdjgfcalk; **abdjgfcald**; **abdjgfcaldj**; **abdjgfhlid**; **abdjgfhlij**; abdjkhfeba; **abdjkhfebcb**; abefhkjdba; **abefhkjdbcb**; abegkhcaid; abegkhcaij; abegklidbc; **abegklidbca**;

Gliedanzahl 11

abdjgfcalkg; abdjgfcalkj; abdjkhfebal; abdjkhfebai; **abegkhcaidb**; **abegkhcaide**; abegkhcaijg; **abegkhcaijk**

Gliedanzahl 12

abdjgfcalkji; abdjgfcalkjd; abdjkhfebalk; **abdjkhfebalh**; **abdjkhfebaid**; **abdjkhfebaij**; abegkhcaijge; abegkhcaijgf

Gliedanzahl 13

abdjgfcalkjdb; abdjgfcalkjde; abdjkhfebalkj; abdjkhfebalkg; **abegkhcaijgeb**; abegkhcaijged; **abegkhcaijgfh**; **abegkhcaijgfc**

Gliedanzahl 14

abdjgfcalkjdba; **abdjgfcalkjdbcb**; abdjgfcalkjdef; **abdjgfcalkjdeg**; **abdjkhfebalkji**; abdjkhfebalkjd; **abdjkhfebalkgf**; abdjkhfebalkge; **abegkhcaijgedi**; **abegkhcaijgedj**

Gliedanzahl 15

abdjkhfebalkjdb; abdjkhfebalkjde

Gliedanzahl 16

abdjkhfebalkjdef; **abdjkhfebalkjdeg**

Gliedanzahl 17

abdjkhfebalkjdefc; abdjkhfebalkjdefh

Gliedanzahl 18

abdjkhfebalkjdefcb; **abdjkhfebalkjdefca**; **abdjkhfebalkjdefhk**; abdjkhfebalkjdefhl

Gliedanzahl 19

abdjkhfebalkjdefhla; **abdjkhfebalkjdefhli**

Überprüfen wir die Fälle. Die Sonderfälle aus **Satz 14** ($\alpha = \frac{\pi}{3}$ und $\alpha = \frac{\pi}{6}$) sind einfach geschlossene Geodäten.

- (1) abegkla: Repräsentiert die Billardbahn der einfach geschlossenen Geodäte mit $S \in (0, 1)$ und $\alpha = \frac{\pi}{3}$. Abbildung 78.
- (2) abdjgfhla: Repräsentiert die Billardbahn der einfach geschlossenen Geodäte mit $S \in (0, 1)$ und $\alpha = \frac{\pi}{6}$. Abbildung 79.
- (3) abefhkjia: Repräsentiert die Billardbahn der einfach geschlossenen Geodäte mit $S \in (\frac{1}{2}, 1)$ und $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Abbildung 80.
- (4) acfedjkla: Repräsentiert die Billardbahn der einfach geschlossenen Geodäte mit $S \in (0, \frac{1}{2})$ und $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Abbildung 81.

Jede einfach geschlossene Geodäte von Klasse (2) ist kongruent zu einer einfach geschlossenen Geodäte von Klasse (3) oder Klasse (4). Daher werden die Klasse (2), (3) und (4) zu einer Klasse zusammengefasst. Alle einfach geschlossenen Geodäten einer Klasse haben die gleiche Länge. Damit ergibt sich die Klassifikation einfach geschlossener Geodäten. (Tabelle 4)

Klasse	α	Länge
(1)	$\frac{\pi}{3}$	2
(2)	$\frac{\pi}{2}$ oder $\frac{\pi}{6}$	$2\sqrt{3}$

Tabelle 4: Klassen einfach geschlossener Geodäten auf dem Oktaeder

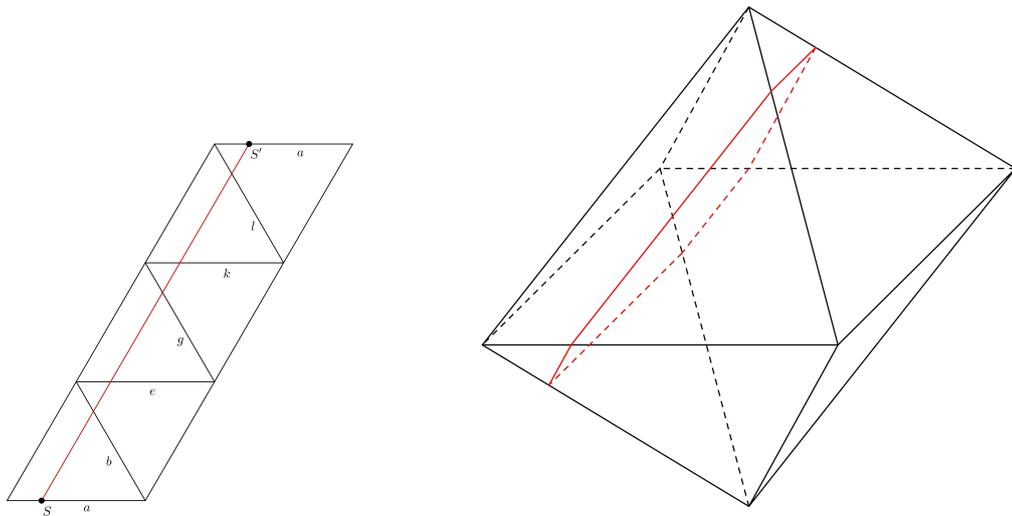


Abbildung 78: Einfach geschlossene Geodäten kongruent zu b_p mit $S = 0.25$ und $\alpha = \frac{\pi}{3}$

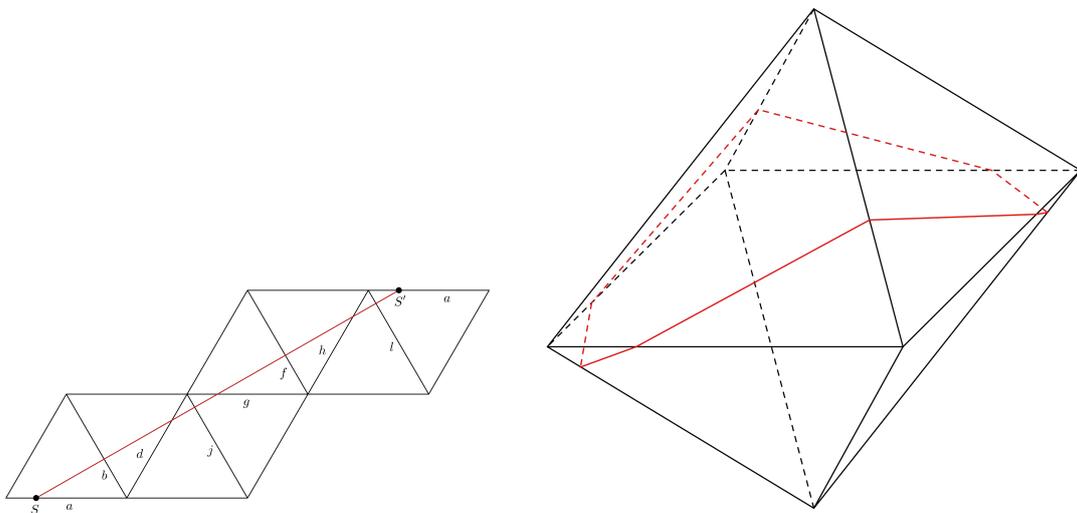


Abbildung 79: Einfach geschlossene Geodäten kongruent zu b_p mit $S = 0.25$ und $\alpha = \frac{\pi}{6}$

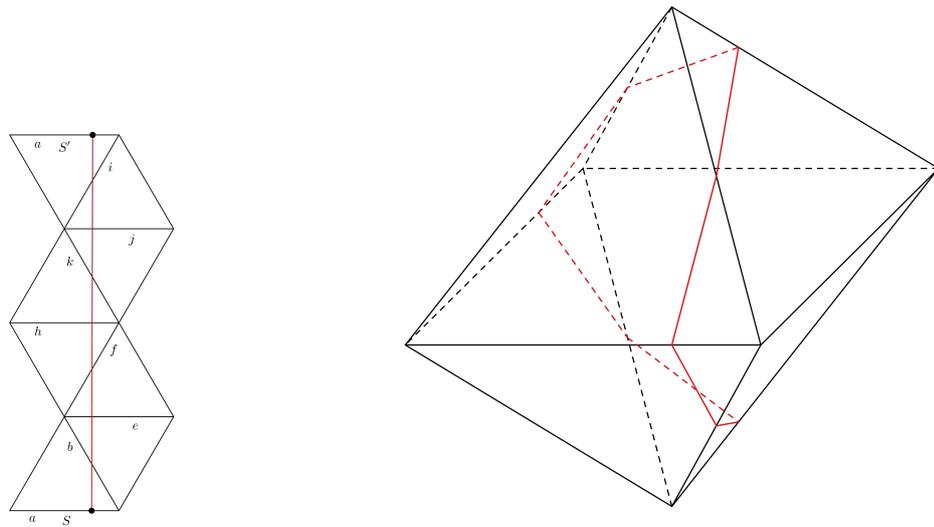


Abbildung 80: Einfach geschlossene Geodäten kongruent zu b_p mit $S = 0.75$ und $\alpha = \frac{\pi}{2}$

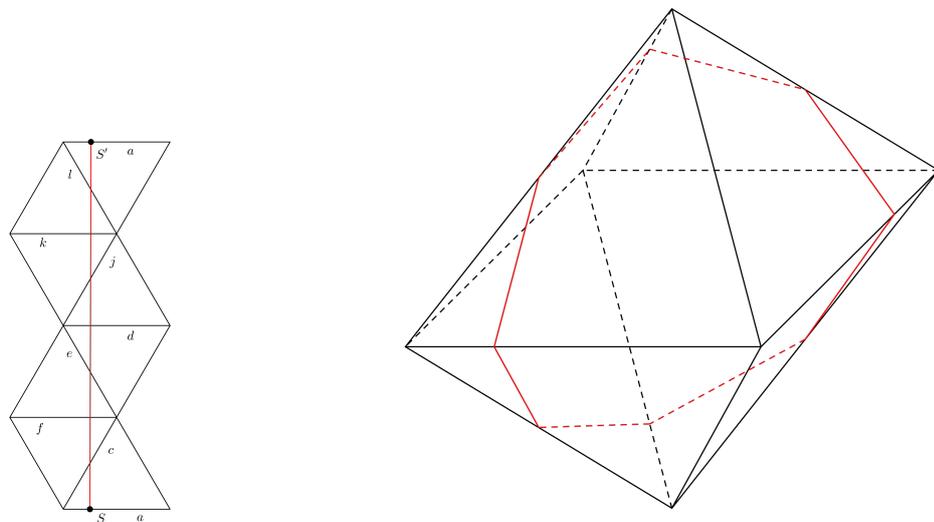


Abbildung 81: Einfach geschlossene Geodäten kongruent zu b_p mit $S = 0.25$ und $\alpha = \frac{\pi}{2}$

Literatur

- [1] BETTINAGLIO, Marco ; LEHMANN, Ferdinando: *Mathematisches Billard*. 1998. – URL http://www.educ.ethz.ch/unt/um/mathe/gb/Billard_Text.pdf. – Zugriffsdatum: 30.10.2013
- [2] FUCHS, Dmitry ; FUCHS, Ekaterina: Closed geodesics on regular polyhedra. In: *Mosc. Math. J.* 7 (2007), S. 265–279
- [3] HILDEBRANDT, Stefan ; TROMBA, Anthony: *Kugel, Kreis und Seifenblasen*. Birkhäuser, 1996. – ISBN 3764352450
- [4] STACHEL, Helmut: Geodätische auf Polyedern. In: *Falten und Verebnen polyedrischer Figuren* 29. Fortbildungstagung für Geometrie, 3.–6. November, 2008, Strobl/Wolfgangsee (Veranst.), URL http://www.geometrie.tuwien.ac.at/stachel/strobl08_druck.pdf, 2008, S. 34 ff.
- [5] TABACHNIKOV, Serge: *Geometrie und Billard (Springer-Lehrbuch) (German Edition)*. 2013. Springer Spektrum, 4 2013. – ISBN 9783642319242